D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 9.2.2016: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di estremo inferiore per un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Se $A \neq \emptyset$ e $\inf A = \sup A$, allora A ammette massimo?

Risposta

(i)

(ii) Si, perché se $\inf A = \sup A$, allora $A = \{a\}$
e $\inf A = \sup A = \max A = \min A = a$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema di Fermat per una funzione di più variabili reali

(ii) Mostrare con un contro-esempio che il teorema precedente é solo CN, ma non CS per gli estremi locali

Risoluzione

(i)

(ii) $f(x,y) = x^2 - y^2$, allora $Df(0,0) = (0,0)$, ma
$(0,0)$ non è un estremo locale

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $|a_{2n+1}| < 4$ e $a_{2n} \geq 4n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora

- [a] diverge;
- [b] ☒ é limitata inferiormente ;
- [c] é limitata;
- [d] converge

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $-4 \leq a_{2n+1} \leq 4$ e $a_{2n} \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi $m = -4$ è un minorante

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tale che $f^{(k)}(-1) = 0$ per $k = 0, 1, 2, 3$ e $f^{(4)}(-1) = -1$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che in $(1 - \delta, 1 + \delta)$ f é

- [a] strettamente crescente ;
- [b] non negativa;
- [c] strettamente decrescente;
- [d] ☒ non positiva.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema sulle CS per gli estremi locali, $x_0 = -1$ è un punto di massimo locale quindi $\exists \delta$ t.c.
$f(x) \leq f(-1) = -1$ per $x \in (-1-\delta, 1+\delta)$

Esercizio 3

[3 punti]

L'equazione algebrica $z^5 - z = 0$ in $\mathbb{C}$ ha esattamente

- [a] infinite soluzioni, di cui 2 reali;
- [b] le soluzioni 0 e 1 con molteplicità 1 e 4 rispettivamente;
- [c] quattro soluzioni distinte
- [d] ☒ cinque soluzioni distinte

Risoluzione (giustificare la risposta)

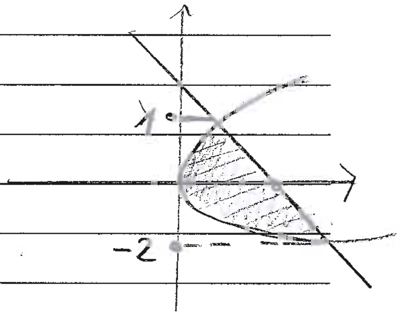
L'equazione $z^5 - z = 0 \iff z(z^4 - 1) = 0$ ha come soluzioni $z = 0$ e le 4 soluzioni distinte di $z^4 - 1 = 0$

Esercizio 4

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 2-y\}$ e calcolare $\iint_D e^y dxdy$.

Risoluzione



$$\iint_D e^y dxdy = \int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} e^y dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left[x e^y\right]_{y^2}^{2-y} = \int_{-2}^{1} (2-y-y^2) e^y dy =$$

$$= \left[e^y(-y^2+y+1)\right]_{-2}^{1} = \frac{5}{e^2} + e$$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1\right) \sin\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

Risoluzione

Poiché $e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1 \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$

$\sin\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ per $n \to \infty$, allora

$$\left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1\right) \sin\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

e quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1\right) \sin\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right) < +\infty$

Esercizio 6 [5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)$ e tracciarne un grafico approssimativo

Risoluzione

funzione

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$

$f(x) = 0 \iff x^2 - x = 0 \iff x = 0\ ,\ x = 1$

$f(x) > 0$ se $x^2 - x > 0 \iff x < 0$ e $x > 1$

$f(x) < 0$ se $x^2 - x < 0 \iff x \in (0, 1)$

Derivata

$$Df(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)} \cdot \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$$

$Df(x) = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{cases} Df(x) > 0 & \text{per } x < -1-\sqrt{2} \text{ e } x > -1+\sqrt{2} \\ Df(x) < 0 & \text{per } x \in (-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$x_0 = -1-\sqrt{2}$ (punto di max. locale) , $x_1 = -1+\sqrt{2}$ (punto di minimo locale)