Equazioni lineari del II ordine

Note per il corso di Analisi Matematica (II modulo) per gli studenti di Ingegneria Automatica e Ingegneria Informatica - Anno Accademico 2007/2008 (I canale).

Queste note hanno lo scopo di integrare il libro di testo "Bertsch - Dal Passo - Giacomelli", Analisi Matematica, sezione 16.5 (pp. 444-447), al quale facciamo riferimento e che lo studente deve comunque consultare.

1) Cominciamo con una immediata conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (Teorema 16.9).
Se y, z sono soluzioni dell'equazione lineare

$$y'' = b(x)y' + c(x)y + d \tag{1}$$

e si ha: $y(x_0) = z(x_0)$ e $y'(x_0) = z'(x_0)$ in un punto $x_0 \in I$, allora $y(x) = z(x)$ per ogni $x \in I$.

Esempio Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'' = a(x)z' + b(x)z \\ z(x_0) = 0, z'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la funzione identicamente nulla: $z \equiv 0$ (perchè questa risolve il problema).

2) *Principio di sovrapposizione* Se y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea

$$y'' = a(x)y' + b(x)y \tag{2}$$

e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, allora anche la combinazione lineare $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ è una soluzione di (2). Una conseguenza del principio di sovrapposizione è che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (2) ha la struttura di *spazio vettoriale*.

3) Osservazione sul Lemma 16.2: due soluzioni y_1, y_2 di (2) sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono i due vettori $(y_1(x_0), y_1'(x_0))$ e $(y_2(x_0), y_2'(x_0))$.

4) Dimostrazione del Teorema 16.10.

(i) Abbiamo $(y_1(x_0), y_1'(x_0)) = (1, 0)$ e $(y_2(x_0), y_2'(x_0) = (0, 1)$, e quindi y_1, y_2 sono linearmente indipendenti per l'osservazione nel punto 3) delle presenti note ($(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono vettori indipendenti).

(ii) Per il momento, supponiamo che y_1 e y_2 siano come in (i). Se y è una soluzione di (2) allora posto $C_1 = y(x_0)$, $C_2 = y'(x_0)$ e $z(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, si ha:

$$\begin{cases} z'' = a(x)z' + b(x)z \\ z(x_0) = y(x_0), z'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

e quindi, per il punto 1) delle presenti note, possiamo concludere che $y \equiv z \equiv C_1 y_1 + C_2 y_2$. In altri termini, ogni soluzione di (2) può essere scritta come combinazione linare di y_1, y_2, cioè le due funzioni y_1 e y_2 formano una *base* per lo spazio delle soluzioni; in particolare, questo spazio ha *dimensione due.* Allora se y_1, y_2 sono due qualunque soluzioni linearmente indipendenti di (2), anche esse formano una base per lo spazio delle soluzioni e l'integrale generale di (2) è

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

(iii) Sia $\widetilde{y}$ una fissata soluzione dell'equazione completa (1) e y_1, y_2 due soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata (1). Se y è una qualunque soluzione di (1), allora $z = y - \widetilde{y}$ è una soluzione di (2):

$$
\begin{aligned}
z'' = y'' - \widetilde{y}'' =& ay' + by' + d - (a\widetilde{y}' + b\widetilde{y} + d) \\
=& a(y' - \widetilde{y}') + b(y - \widetilde{y}) \\
=& az' + bz,
\end{aligned}
$$

e quindi esistono due costanti $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tali che $z = C_1 y_1 + C_2 y_2$, cioè

$$
y = \widetilde{y} + C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{3}
$$

Viceversa, è facile verificare che ogni funzione del tipo (3) è una soluzione di (1). □

5) Date due funzioni $y_1, y_2 \in C(I)$, il loro *Wronskiano* è il determinante

$$
W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x).
$$

La condizione nel punto 3) delle presenti note può essere riformulata nel modo seguente: due soluzioni y_1, y_2 di (2) sono linearmente indipendenti se e solo $W(x_0) \neq 0$ (se e solo se $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$).