INGEGNERIA CIVILE
A.A. 2009-2010 - CORSO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Note sui Teoremi di Guldino

Fabio Scarabotti - Dipartimento MeMoMat

1 Superfici di rotazione

Sia $P_0 = (x_0, 0, z_0)$ un punto nel semipiano $y = 0$, $x \geq 0$. Ruotando attorno all'asse z tale punto genera la circonferenza di equazione

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = x_0^2, \end{cases} \qquad \text{che in forma parametrica è} \qquad \begin{cases} x = x_0 \cos\theta \\ y = x_0 \sin\theta \\ z = z_0. \end{cases} \tag{1}$$

Infatti, tale circonferenza giace sul piano $z = z_0$ ed è formata dai punti la cui distanza dall'asse z, pari a $\sqrt{x^2 + y^2}$, è uguale a x_0. Se $F(x, z) = 0$ è l'equazione in forma implicita di una curva $\mathcal{C}$ nel semipiano $y = 0$, $x \geq 0$, ruotando attorno all'asse z tale curva genera la superficie Σ di equazione $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Infatti, se ruotiamo attorno all'asse z il punto (x, y, z) la circonferenza ottenuta interseca il semipiano $y = 0$, $x \geq 0$ nel punto $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$ e quindi

$$(x, y, z) \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Chiaramente, si possono invertire i ruoli degli assi: se la curva che ruotiamo si trova nel semipiano $z = 0$, $x \geq 0$, ha equazione $F(x, y) = 0$ e la ruotiamo attorno all'asse y la superficie ottenuta avrà equazione $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$.

Esempio 1.1 1. Ruotando attorno all'asse z la semiretta $\begin{cases} z = ax \\ x \geq 0. \end{cases}$, dove $a > 0$, otteniamo il cono $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$, che corrisponde alla falda superiore del cono circolare $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

2. Supponiamo $0 < r < R$ e consideriamo la circonferenza $(x-R)^2 + z^2 = r^2$, che si trova nel semipiano $y = 0$, $x > 0$. Ruotando tale circonferenza attorno all'asse z si genera una superficie chiamata *toro* (la forma è quella di una ciambella) che ha equazione: $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$. Svolgendo il quadrato e portando $2\sqrt{x^2 + y^2}$ a secondo membro, tale equazione diventa:

$$x^2 + y^2 + R^2 - r^2 + z^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2},$$

che elevata ancora al quadrato fornisce *l'equazione algebrica del toro*:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2). \tag{2}$$

Essendo del quart'ordine, non si tratta certamente di una quadrica.

3. Consideriamo la semiparabola $z = ax^2$, $x \geq 0$. Ruotando attorno all'asse z essa genera il *paraboloide ellittico (rotondo)* di equazione $z = a(x^2 + y^2)$.

2 Primo Teorema di Guldino

Sia ora D un dominio nel semipiano $y = 0$, $x > 0$. Osserviamo che su D la ρ delle coordinate cilindriche coincide con la x, per cui possiamo pensare D anche come un dominio nel semipiano $\rho > 0, z \in \mathbb{R}$. Ruotando attorno all'asse z, D genera un *solido di rotazione* Ω. In base alla seconda formula in (1), possiamo dire che la descrizione di Ω in coordinate cilindriche è:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z, \end{cases} \qquad (\rho, z) \in D, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Infatti Ω è l'insieme delle circonferenze che si ottengono ruotando i punti di D, e ogni punto di D con la prima coordinata ρ determina il raggio, con la seconda coordinata z determina la quota. Quindi

$$\text{Volume}(\Omega) = \iint_D \left(\int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho dz = 2\pi \iint_D \rho d\rho dz.$$

Essendo $\rho \equiv x$ in D, otteniamo la formula notevole

$$\boxed{\text{Volume}(\Omega) = 2\pi \iint_D x dx dz.} \tag{3}$$

Per poter enunciare il I Teorema di Guldino, abbiamo bisogno di introdurre il *baricentro (geometrico)* del dominio D. Esso è il punto di coordinate $(x_b, 0, z_b)$ date dalle formule

$$x_b = \frac{\iint_D x dx dz}{\text{Area}(D))} \qquad \text{e} \qquad z_b = \frac{\iint_D z dx dz}{\text{Area}(D)},$$

dove naturalmente $\text{Area}(D) = \iint_D dx dz$. Il **I Teorema di Guldino** è la seguente versione di (3):

$$\text{Volume}(\Omega) = 2\pi x_b \text{Area}(D),$$

e può essere espresso a parole dicendo che *il volume di Ω è pari all'area del dominio D moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro quando ruota attorno all'asse z.*

Esempio 2.1 Il baricentro del cerchio $(x - R)^2 + z^2 \leq r^2$ cade evidentemente nel suo centro: $x_b = R$. Quindi il volume del solido racchiuso dalla superficie (2) è pari a $2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$.

3 Secondo Teorema di Guldino

Sia ora $\mathcal{C}$ una curva nel semipiano $y = 0$, $x \geq 0$, data nella forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I,$$

dove I intervallo dell'asse reale. Chiaramente deve essere $x(t) \geq 0$ per ogni $t \in I$. Ruotando attorno all'asse z la curva $\mathcal{C}$ genera la seguente superficie Σ:

$$\begin{cases} x = x(t) \cos\theta \\ y = x(t) \sin\theta \\ z = z(t). \end{cases} \qquad t \in I, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{4}$$

Questo segue subito dalla forma parametrica di (1). Si ha poi:

$$\vec{P}_t = (x'(t)\cos\theta, x'(t)\sin\theta, z'(t)) \qquad \text{e} \qquad \vec{P}_\theta = (-x(t)\sin\theta, x(t)\cos\theta, 0)$$

e quindi

$$E \equiv \|\vec{P_t}\|^2 = x'(t)^2 + z'(t)^2, \qquad F \equiv \vec{P_t} \cdot \vec{P_\theta} = 0 \qquad G \equiv \|\vec{P_t \theta}\|^2 = x(t)^2.$$

In particolare, l'annullarsi di F esprime una proprietà geometrica della parametrizzazione (4): le linee θ =cost. (i *meridiani*) sono sempre pependicolari alle linee t =cost. (i *paralleli*). L'espressione dell'elemento d'area $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dtd\theta$ è il seguente:

$$\boxed{d\sigma = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}dtd\theta.} \tag{5}$$

Esercizio 3.1 Usare (4) e (5) per ricavare le parametrizzazioni e l'elemento d'area del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, del cono $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ e della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (già viste a lezione).

Possiamo ora applicare (5) per ottenere l'area della superficie di Σ. Se $I = [a, b]$ si ha:

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}dtd\theta = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}dt. \tag{6}$$

Ma $\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}dt$ è proprio l'elemento di lunghezza ds sulla curva $\mathcal{C}$ mentre $x(t)$ è la funzione x valutata sulla curva stessa. Quindi possiamo scrivere (6) nella forma notevole:

$$\boxed{\text{Area}(\Sigma) = 2\pi \int_{\mathcal{C}} xds.} \tag{7}$$

Per poter dare alla formula (7) la forma classica del II Teorema di Guldino, abbiamo bisogno di introdurre il *baricentro (geometrico)* della curva $\mathcal{C}$. Esso è il punto di coordinate $(x_b, 0, z_b)$ date dalle formule

$$x_b = \frac{\int_{\mathcal{C}} xdS}{\ell(\mathcal{C})} \qquad \text{e} \qquad z_b = \frac{\int_{\mathcal{C}} zdS}{\ell(\mathcal{C})},$$

dove $\ell(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} dS$ è la lunghezza della curva $\mathcal{C}$. Il **II Teorema di Guldino** è la seguente versione di (7):

$$\text{Area}(\Sigma) = 2\pi x_b \ell(\mathcal{C})$$

e può essere espresso a parole dicendo che *l'area di Σ è pari alla lunghezza della curva $\mathcal{C}$ moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro quando ruota attorno all'asse z.*

Esempio 3.2

1. Il baricentro della circonferenza $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ cade evidentemente nel suo centro: $x_b = R$ e quindi l'area della superficie del toro (2) è pari a $2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr$. Da (4) possiamo anche ottenere la seguente rappresentazione parametrica del Toro:

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ z = r\sin\phi. \end{cases} \qquad 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi.$$

   Infatti, la circonferenza ruotata ha equazione $\begin{cases} x = R + r\cos\phi \\ z = r\sin\phi. \end{cases}$, $0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi$.

2. Se consideriamo il segmento congiungente i punti $(a, 0, 0)$ e $(0, 0, h)$, $h, a > 0$, esso ruotando genera la superficie laterale del cilindro circolare retto di altezza h e raggio di base a. Il baricentro cade a metà del segmento e quindi $x_b = \frac{r}{2}$. Possiamo concludere che la superficie laterale del cono è pari a: $2\pi\sqrt{a^2 + h^2}\frac{r}{2} = \pi\sqrt{a^2 + h^2}r$.