INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 11-03-2011

ESERCIZIO 1
Calcolare

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove $\vec{F} = \left(xy^2, x^2y, \frac{z^3}{3}\right)$ e V é il solido delimitato dalla superficie $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ e dai piani $z = 0$ ed $z = 2$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di della divergenza troviamo:

$$\begin{aligned}\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dxdydz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\ &= \iint_D \left[\int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) dz\right] dxdy = \iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + \frac{8}{3}\right) dxdy,\end{aligned}$$

dove $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9\}$ è la base del cilindro V. Usando le coordinate polari centrate in $(1, 1)$

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos\theta \\ y = 1 + \rho \sin\theta \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\iint_D \left(2x^2 + 2y^2 + \frac{8}{3}\right) dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left[2(1 + \rho\cos\theta)^2 + 2(1 + \rho\sin\theta)^2 + \frac{8}{3}\right] \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 \left(2\rho^3 + \frac{20}{3}\rho\right) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{2} + \frac{10}{3}\rho^2\right]_0^3 = 141\pi.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3 & \text{per} \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Studiare la convergenza dello sviluppo ottenuto.

SOLUZIONE
Osserviamo che la funzione f è discontinua in $\frac{\pi}{2}$, e quindi la convergenza non sarà totale. Si ha poi:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} -2dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi 3dx = 1;$$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} -2\cos kx dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 3\cos kx dx \\
=& -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{6}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = -\frac{10}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \frac{10(-1)^{(k+1)/2}}{k\pi} & \text{per } k \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } k \text{ pari.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{10}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\cos kx = \frac{1}{2}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{10(-1)^{m+1}}{(2m+1)\pi}\cos(2m+1)x = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in [0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \\ \frac{1}{2} & \text{per } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}
$$

ESERCIZIO 3

Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = \sin^2 x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}
$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\sin^2(x+2s\sqrt{t})ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\frac{1-\cos(2x+4s\sqrt{t})}{2}ds \\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\left[\cos 2x\cos 4s\sqrt{t} - \sin 2x \sin 4s\sqrt{t}\right] ds \\
=& \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\cos 4s\sqrt{t} ds \\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x e^{-4t}.
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$
\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = xy(1+z^2) & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = xy\sin z & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}
$$

SOLUZIONE

Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo prima le medie sferiche dei dati. Si ha:

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)(y+r\sin\theta\sin\varphi)[1+(z+r\cos\theta)^2]\sin\theta d\theta d\varphi \\
=& \frac{xy}{2}\int_0^{\pi}[1+z^2+r^2\cos^2\theta+2rz\cos\theta]\sin\theta d\theta \\
=& \frac{xy}{2}[-\cos\theta - z^2\cos\theta - r^2\frac{\cos^3\theta}{3} - zr\cos^2\theta]_0^{\pi} \\
=& xy + xyz^2 + \frac{xyr^2}{3};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_h(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)(y+r\sin\theta\sin\varphi)\sin(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi \\
(s=z+r\cos\theta) \qquad =& \frac{xy}{2}\int_0^{\pi}\sin(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{xy}{2r}\int_{z-r}^{z+r}\sin s ds \\
=& \frac{xy}{2r}[-\cos(z+r)+\cos(z-r)] = xy\sin z\frac{\sin r}{r}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{t[xy+xyz^2+\frac{xyt^2}{3}]\right\} + t\cdot xy\sin z\frac{\sin t}{t} = xy+xyz^2+xyt^2+xy\sin z\sin t.
$$

ESERCIZIO 5

Determinare una funzione $g(x)$ definita in $[0,1]$ in modo tale che la soluzione del problema

$$
\begin{cases}
u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<1, 0<y<1, \\
u(x,0)=0 & 0\le x\le 1, \\
u(x,1)=g(x) & 0\le x\le 1, \\
u(0,y)=y & 0\le y\le 1, \\
u(1,y)=y-2y^2, & 0\le y\le 1,
\end{cases}
$$

verifichi la disuguaglianza $u(x,y)\ge y^3-3x^2y$ per ogni $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$

SOLUZIONE

La funzione y^3-3x^2y è armonica. Prendendo $g(x)=1-2x^2$ i dati si raccordano e si ha $u(x,y)\ge y^3-3x^2y$ su tutta la frontiera di $[0,1]\times[0,1]$. La disuguaglianza voluta segue allora dal principio del massimo.