INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 25-01-2012 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Usando il teorema di Stokes, calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v} dt,$$

dove T é il triangolo di vertici $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, il verso positivo di $+\partial T$ è quello che dall'alto risulta antiorario ed $\vec{F} = (y^2 z, xz^2, x^2 y)$.

SOLUZIONE
Applicando il teorema di Stokes troviamo:

$$\oint_{+\partial T} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{+T} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Si ha:

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & xz^2 & x^2 y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(x^2 - 2xz) + \mathbf{j}(y^2 - 2xy) + \mathbf{k}(z^2 - 2yz) \equiv (x^2 - 2xz, y^2 - 2xy, z^2 - 2yz).$$

Per quanto riguarda T, esso giace sul piano passante per i tre vertici, che ha equazione $x+z-1 = 0$ e si proietta sul piano xy nel triangolo $T_0 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Quindi, usando la parametrizzazione $z = 1 - x$, $(x,y) \in T_0$, si ha:

$$\vec{n} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \qquad d\sigma = \sqrt{1+1+0}dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\int_{+T} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iint_{T_0} \{[x^2 - 2xz] + [z^2 - 2yz]\}_{z=1-x} dxdy \\
&= \iint_{T_0} \{[x^2 - 2x(1-x)] + [(1-x)^2 - 2y(1-x)]\} dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^x (4x^2 - 4x + 1 - 2y + 2xy) dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[4x^2 y - 4xy + y - y^2 + xy^2 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^1 (5x^3 - 5x^2 + x) dx = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Sviluppare in serie di Fourier di soli coseni nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $\sin 2x$ esaminando

la convergenza della serie ottenuta. E' richiesto anche il disegno dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che f è continua e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x dx = 0,$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 4x dx = 0$$

e per $k \neq 0, 2$,

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(k+2)x - \sin(k-2)x] dx \\ =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+2)x}{k+2} + \frac{\cos(k-2)x}{k-2}\right]_0^\pi \\ =& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{k+2} + \frac{(-1)^k}{k-2} + \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2}\right] \\ =& 4\frac{(-1)^k - 1}{(k^2-4)\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ -\frac{8}{(k^2-4)\pi} & k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Si ha quindi, per ogni $x \in [0, \pi]$,

$$\sin 2x = \frac{8}{3\pi}\cos x + \sum_{k=3}^{\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{(k^2-4)\pi}\cos kx \equiv \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{8}{[(2m+1)^2 - 4]\pi}\cos(2m+1)x$$

con convergenza totale.

ESERCIZIO 3
Dopo aver disegnato le relative caratteristiche, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t + (2-3u)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x < 0 \\ 2-x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Le caratteristiche sono: le rette $x = x_0 - 4t$ per $x_0 < 0$, le rette $x = x_0 + (3x_0 - 4)t$ per $0 \leq x_0 \leq 1$ e le rette $x = x_0 - t$ per $x_0 > 1$. Per $-4t \leq x \leq 1 - t$ la soluzione in forma implicita è $u = 2 - [x - (2-3u)t]$, che esplicitata fornisce $u = \frac{2-x+2t}{1+3t}$. Quindi si ha:

$$u(x,t)=\begin{cases} 2 & \text{per } t>0, x<-4t,\\ \frac{2-x+2t}{1+3t} & \text{per } t>0, -4t\le x\le 1-t,\\ 1 & \text{per } t>0, x>1-t.\end{cases}$$

Verifica: nelle zone $x<-4t$ e $x>1-t$ la funzione è costante (quindi risolve l'equazione) e verifica le condizioni iniziali. Nella zona $-4t\le x\le 1-t$ si ha: $u(x,0)=\frac{2-x+2t}{1+3t}\Big|_{t=0}=2-x$ e poi

$$u_t+(2-3u)u_x=\frac{2(1+3t)-3(2-x+2t)}{(1+3t)^2}+\left(2-3\frac{2-x+2t}{1+3t}\right)\cdot\frac{(-1)}{1+3t}=\frac{-4+3x-(-4+3x)}{(1+3t)^2}=0.$$

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0 & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0,\\ u(x,y,z,0)=x^2yz & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\ u_t(x,y,z,0)=xy^2z & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.\end{cases}$$

Facoltativo: la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde in dimensione 3. Le medie sferiche dei dati iniziali valgono:

$$\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r)=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x+r\sin\theta\cos\varphi)^2(y+r\sin\theta\sin\varphi)(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x^2y+yr^2\sin^2\theta\cos^2\varphi)(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[-x^2yz\cos\theta+yr^2z\cos^2\varphi\frac{\cos^3\theta}{3}-yr^2z\cos\theta\cos^2\varphi\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\varphi\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(2x^2yz+\frac{4}{3}yzr^2\cos^2\varphi\right)d\varphi\\
=&x^2yz+\frac{1}{3}yzr^2
\end{aligned}$$

e in modo analogo

$$M_h(x,y,z,r)=xy^2z+\frac{1}{3}xzr^2.$$

Quindi, applicando la formula di Kirchhoff, si trova:

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[t\left(x^2yz+\frac{1}{3}yzt^2\right)\right]+t\left(xy^2z+\frac{1}{3}xzt^2\right)=x^2yz+yzt^2+xy^2zt+\frac{1}{3}xzt^3.$$

Verifica:

$$u(x,y,z,0) = x^2yz, \qquad u_t(x,y,z,0) = (2yzt + xy^2z + xzt^2)|_{t=0} = xy^2z,$$

$$u_{tt} - \Delta u = (2xzt + 2yz) - (2yz + 2xzt) = 0.$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x^3e^x & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta sia la soluzione del problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del calore sulla retta. Si ha:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} e^{x+2s\sqrt{t}} (x + 2s\sqrt{t})^3 ds \\ =& \frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+2s\sqrt{t}} (x^3 + 6x^2s\sqrt{t} + 12xs^2t + 8s^3t\sqrt{t}) ds \\ (s = r + \sqrt{t}) \qquad =& \frac{e^x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2+t} (x^3 + 6x^2r\sqrt{t} + 6x^2t + 12xr^2t + 12xt^2 + 24r^2t^2 + 8t^3) dr \\ =& e^{x+t}(x^3 + 6x^2t + 6xt + 12xt^2 + 12t^2 + 8t^3). \end{aligned}$$

Verifica: $u(x,0) = x^3e^x$ e poi

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} =& e^{x+t}(x^3 + 6x^2 + 6x^2t + 30xt + 12xt^2 + 36t^2 + 8t^3 + 6x + 24t) \\ & - e^{x+t}(x^3 + 6x^2 + 6x^2t + 30xt + 12xt^2 + 36t^2 + 8t^3 + 6x + 24t) = 0. \end{aligned}$$