INGEGNERIA CIVILE - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
PROVA SCRITTA DEL 20-07-2012 - SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

dove $\vec{F} = (3xy^2, 3yx^2, z^2)$ e V è il solido delimitato dalle superfici $z = -1$, $z = 2$ e $z = -2 + \sqrt{x^2 + y^2}$.

SOLUZIONE
Si ha div$\vec{F} = 3(x^2 + y^2) + 2z$ e quindi

$$\begin{aligned}
\int_{+\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma =& \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-1}^{2} \left[\int_0^{z+2} \left(3\rho^2 + 2z\right) \rho d\rho \right] dz \right\} d\theta \\
=& 2\pi \int_{-1}^{2} \left[\frac{3}{4}\rho^4 + z\rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=z+2} dz \\
=& 2\pi \int_{-1}^{2} \left[\frac{3}{4}(z+2)^4 + (z^3 + 4z^2 + 4z) \right] dz \\
=& \frac{3\pi}{2} \left[\frac{(z+2)^5}{5} \right]_{z=-1}^{z=2} + 2\pi \left[\frac{z^4}{4} + \frac{4}{3}z^3 + 2z^2 \right]_{z=-1}^{z=2} \\
=& \frac{3069}{10}\pi + \frac{87}{2}\pi \\
=& \frac{1752}{5}\pi.
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2
Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione $\cos 2x$, nell'intervallo $[0, \pi]$. Esaminare la convergenza dello sviluppo ottenuto e disegnare il grafico dell'estensione periodica corrispondente.

SOLUZIONE
Osserviamo preliminarmente che $\cos 2x|_{x=0} = 1 \neq 0$ e $\cos 2x|_{x=\pi} = 1 \neq 0$: le condizioni di commpatibilità non sono verificate e quindi la convergenza dello sviluppo ottenuto non sarà totale. Procediamo ora con il calcolo dei coefficienti. Si ha:

$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 4x dx = 0,$$

e per $k \geq 1$, $k \neq 2$,

$$\begin{aligned}
b_k =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos 2x \sin kx dx \\
=& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[\sin(k+2)x + \sin(k-2)x\right] dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+2)x}{k+2} - \frac{\cos(k-2)x}{k-2}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^k}{k+2} - \frac{(-1)^k}{k-2} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k-2}\right] \\
=& \frac{2k}{\pi(k^2-4)}\left[1-(-1)^k\right] \equiv \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{4k}{\pi(k^2-4)} & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{\infty} \frac{2k}{\pi(k^2-4)}\left[1-(-1)^k\right]\sin kx \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(2m+1)}{\pi[(2m+1)^2-4]}\sin(2m+1)x = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0, \pi \\ \cos 2x & \text{per } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

con convergenza puntuale ma non totale.

ESERCIZIO 3

Dopo aver determinato la soluzione stazionaria, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = -4 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x,0) = \sin 2x + x^2 - \frac{\pi^2+1}{\pi}x + 2 & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 2, u(\pi,t) = 1 & t > 0. \end{cases}$$

Calcolare anche la velocità di convergenza alla soluzione stazionaria.

SOLUZIONE Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in dimensione 1. La soluzione stazionaria si trova risolvendo il problema $\begin{cases} -2u_{\mathrm{s}}'' = -4, \\ u_{\mathrm{s}}(0) = 2, u_{\mathrm{s}}(\pi) = 1, \end{cases}$, la cui soluzione è: $u_{\mathrm{s}}(x) = x^2 - \frac{\pi^2+1}{\pi}x + 2$. Ponendo $v(x,t) = u(x,t) - u_{\mathrm{s}}(x)$, la funzione v deve risolvere il problema:

$$\begin{cases} v_t - 2v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(x,0) = \sin 2x & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

Dato che $\sin 2x$ coincide con il suo sviluppo i serie di soli seni, si ha: $v(x,t) = e^{-8t}\sin 2x$ e quindi

$$u(x,t) = x^2 - \frac{\pi^2+1}{\pi}x + 2 + e^{-8t}\sin 2x.$$

Ne segue che

$$|u(x,t) - u_s(x)| \le e^{-8t} \qquad \text{per ogni} \qquad t \ge 0.$$

ESERCIZIO 4
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t + (2-u)u_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = -\sqrt{x} - 2 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione del traffico. Le caratteristiche sono: $x = x_0 + (\sqrt{x_0} + 4)t$, $x_0 \in \mathbb{R}$. La soluzione in forma implicita è: $u = -\sqrt{x - (2-u)t} - 2$. Per esplicitarla, possiamo riscriverla nella forma $\sqrt{x-(2-u)t} = -u - 2$ ed elevando al quadrato otteniamo la seguente equazione di secondo grado in u

$$u^2 + (4-t)u + (4 + 2t - x) = 0.$$

Le soluzioni sono

$$u(x,t) = \frac{-4 + t \pm \sqrt{t^2 - 16t + 4x}}{2} \xrightarrow{t \to 0^+} \frac{-4 \pm 2\sqrt{x}}{2} - 2 \pm \sqrt{x}.$$

In base alla condizione iniziale, la soluzione è: $u(x,t) = \frac{-4+t-\sqrt{t^2-16t+4x}}{2}$

Verifica: la condizione iniziale è già stata verificata. Si ha poi:

$$\begin{aligned} u_t + (2-u)u_x =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-8)(t^2 - 16 + 4x)^{-1/2} \\ & - \frac{1}{2}\left[8 - t + (t^2 - 16 + 4x)^{1/2}\right](t^2 - 16 + 4x)^{-1/2} \\ =& 0. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5
Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \frac{yz}{1+z^2} & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = (x^2 + y^2)\sin z & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Facoltativo: verificare che la funzione ottenuta risolve effettivamente il problema.

SOLUZIONE
Si tratta di un problema Cauchy per l'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$. Calcoliamo le medie sferiche dei dati:

$$
\begin{aligned}
M_g(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{(y+r\sin\theta\sin\varphi)(z+r\cos\theta)}{1+(z+r\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta d\varphi\\
(s=z+r\cos\theta) \qquad =& \frac{y}{2r}\int_{z-r}^{z+r}\frac{s}{1+s^2}ds = \frac{y}{4r}\left[\log(1+s^2)\right]_{s=z-r}^{s=z+r}\\
=& \frac{y}{4r}\log\frac{1+(z+r)^2}{1+(z-r)^2};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_h(x,y,z,r) =& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[(x+r\sin\theta\cos\varphi)^2+(y+r\sin\theta\sin\varphi)^2\right]\sin(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\\
=& \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x^2+y^2+r^2\sin^2\theta)\sin(z+r\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi\\
=& \frac{1}{2r}\int_{z-r}^{z+r}[x^2+y^2+r^2-(s-z)^2]\sin s ds\\
& (s=z+r\cos\theta, \quad r^2\sin^2\theta = r^2-(s-z)^2)\\
=& \frac{1}{2r}\big[-(x^2+y^2+r^2-z^2)\cos s - 2zs\cos s + 2z\sin s + s^2\cos s\\
& \qquad - 2s\sin s - 2\cos s\big]_{s=z-r}^{s=z+r}\\
=& -\frac{1}{2r}(x^2+y^2+2)[\cos(z+r)-\cos(z-r)] - [\sin(z+r)+\sin(z-r)]\\
=& \frac{1}{r}(x^2+y^2+2)\sin z\sin r - 2\sin z\cos r.
\end{aligned}
$$

Applicando la formula di Kirchhoff, si trova:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(t\cdot\frac{y}{4t}\log\frac{1+(z+t)^2}{1+(z-t)^2}\right) + t\left[\frac{1}{t}(x^2+y^2+2)\sin z\sin t - 2\sin z\cos t\right]\\
=& \frac{y(z+t)}{2[1+(z+t)^2]} + \frac{y(z-t)}{2[1+(z-t)^2]} + (x^2+y^2+2)\sin z\sin t - 2t\sin z\cos t.
\end{aligned}
$$

<u>Verifica</u>: È immediato verificare che $u(x,y,z,0) = \frac{yz}{1+z^2}$. Usando le identità

$$
\frac{d}{ds}\frac{s}{1+s^2} = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{1+s^2} = \frac{2s^3-6s}{(1+s^2)^3}
$$

troviamo che

$$
u_t(x,y,z,t) = \frac{y\left[1-(z+t)^2\right]}{2\left[1+(z+t)^2\right]^2} - \frac{y[1-(z-t)^2]}{2[1+(z-t)^2]^2} + (x^2+y^2+2)\sin z\cos t - 2\sin z\cos t + 2t\sin z\sin t
$$

e quindi $u_t(x,y,z,0) = (x^2+y^2)\sin z$. Infine,

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u =& \left\{ \frac{y[(z+t)^3 - 3(z+t)]}{[1+(z+t)^2]^3} + \frac{y[(z-t)^3 - 3(z-t)]}{[1+(z-t)^2]^3} - (x^2+y^2+2)\sin z \sin t \right. \\
& \left. + 2t \sin z \cos t + 4 \sin z \sin t \right\} \\
& - \left\{ \frac{y[(z+t)^3 - 3(z+t)]}{[1+(z+t)^2]^3} + \frac{y[(z-t)^3 - 3(z-t)]}{[1+(z-t)^2]^3} - (x^2+y^2+2)\sin z \sin t \right. \\
& \left. + 2t \sin z \cos t + 4 \sin z \sin t \right\} \\
=& 0.
\end{aligned}
$$