ANALISI MATEMATICA I - II modulo
Ingegneria Informatica - canale I
Ingegneria Automatica
Compito del 26-03-2008

COMPITO I

ESERCIZIO 1
Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}dx; \qquad\qquad b) \quad \int_0^1 \frac{1-\cos\sqrt{x}}{e^{x^2}-1}dx.$$

SOLUZIONE

a) Dalle stime asintotiche $\sin t \sim t$ e $e^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, otteniamo subito:

$$\frac{e^{1/x^2}-1}{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \frac{1/x^2}{1/\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale converge.
b) Usando anche la stima $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$, si trova subito:

$$\frac{1-\cos\sqrt{x}}{e^{x^2}-1} \sim \frac{x/2}{x^2} = \frac{1}{2x} \qquad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi l'integrale non converge.

ESERCIZIO 2

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, *tutte* le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + (5-\alpha)y' - 5\alpha y = 0 \\ y(0) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

L'equazione è lineare, del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + (5-\alpha)\lambda - 5\alpha = 0$, le cui soluzioni sono: $\alpha, -5$. Quindi l'integrale generale è: $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2e^{\alpha x}$, per $\alpha \neq -5$; $y(x) = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x}$ per $\alpha = -5$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, troviamo $C_1 + C_2 = 0$ nel primo caso, $C_1 = 0$ nel secondo. Se $\alpha < 0, \alpha \neq -5$, le soluzioni del problema sono $y(x) = C_1e^{-5x} - C_1e^{\alpha x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = -5$ le soluzioni sono $y(x) = C_2xe^{-5x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \geq 0$, l'unica soluzione del problema è la funzione identicamente nulla (deve essere $C_1 = 0$).

ESERCIZIO 3
(i) Determinare i punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x, y) = xye^{-(x+y)}$$

e dire se sono punti di massimo o minimo o punti di sella.

(ii) Trovare massimo e minimo assoluto della funzione nell'insieme T definito da

$$T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 5\}.$$

SOLUZIONE

(i) Abbiamo $f_x = ye^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)}$ e $f_y = xe^{-(x+y)} - xye^{-(x+y)}$, e quindi i punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y(1-x) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases}$$

che ha due soluzioni: $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Calcolando il determinante Hessiano si trova:

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella, e poi

$$H(1,1) = \begin{vmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0, \qquad f_{xx}(1,1) = -e^{-2} < 0,$$

e quindi $(1, 1)$ è un punto di massimo relativo.

(ii) Anzitutto osserviamo che dei due punti critici, solo $(1, 1)$ è interno al dominio e $f(1, 1) = e^{-2}$. Studiamo la funzione sulla frontiera di T, che è un triangolo rettangolo.

Sui lati $\{(0, y), 0 \leq y \leq 5\}$ e $\{(x, 0), 0 \leq x \leq 5\}$ (i cateti del triangolo) la funzione è identicamente nulla.

Sul lato $\{(x, 5 - x), 0 \leq x \leq 5\}$ (l'ipotenusa) la funzione diventa $\varphi(x) = f(x, 5 - x) = (-x^2 + 5x)e^{-5}$, che è crescente per $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$, decrescente per $\frac{5}{2} \leq x \leq 5$ e ha un massimo relativo in $\frac{5}{2}$, che corrisponde al punto $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Inoltre si ha $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{25}{4}e^{-5}$. Dato che $e^{-2} > \frac{25}{4}e^{-5}$ (equivale a $e^3 > \frac{25}{4}$, ovvia perchè $4e^3 > 4 \cdot 8 = 32$) possiamo concludere che $\max_T f = e^{-2}$, assunto in $(1, 1)$, e $\min_T f = 0$, assunto nei punti di frontiera $\{(0, y), 0 \leq y \leq 5\}$ e $\{(x, 0), 0 \leq x \leq 5\}$ (del resto è ovvio che $f \geq 0$ in T e che $f = 0$ solo sui due cateti).

COMPITO II

ESERCIZIO 1
Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{e^{1/\sqrt{x}}-1}dx; \qquad\qquad b) \quad \int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x^{3/2})}dx.$$

SOLUZIONE

a) Dalle stime asintotiche $\sin t \sim t$ e $e^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, otteniamo subito:

$$\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{e^{1/\sqrt{x}}-1} \sim \frac{1/x^2}{1/\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty,$$

e quindi l'integrale converge.
b) Usando anche la stima $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \to 0$, si trova subito:

$$\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos(x^{3/2})} \sim \frac{x^2}{x^3/2} = \frac{2}{x} \qquad \text{per} \quad x \to 0^+$$

e quindi l'integrale non converge.

ESERCIZIO 2

Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, *tutte* le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y'' + (\alpha+4)y' + 4\alpha y = 0 \\ y(0) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE

L'equazione è lineare, del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 + (4+\alpha)\lambda + 4\alpha = 0$, le cui soluzioni sono: $-\alpha, -4$. Quindi l'integrale generale è: $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-\alpha x}$ per $\alpha \neq 4$; $y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x}$ per $\alpha = 4$. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, troviamo $C_1 + C_2 = 0$ nel primo caso, $C_1 = 0$ nel secondo. Se $\alpha > 0, \alpha \neq 4$, le soluzioni del problema sono $y(x) = C_1 e^{-4x} - C_1 e^{-\alpha x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Se $\alpha = 4$ sono $y(x) = C_2 x e^{-4x}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \leq 0$, l'unica soluzione del problema è la funzione identicamente nulla (deve essere $C_1 = 0$).

ESERCIZIO 3
(i) Determinare i punti stazionari in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = xye^{x+2y}$$

e dire se sono punti di massimo o minimo o punti di sella.

(ii) Trovare massimo e minimo assoluto della funzione nell'insieme T definito da

$$T = \{(x, y) : x \leq 0, y \leq 0, x + 2y \geq -3\}.$$

SOLUZIONE

(i) Abbiamo $f_x = ye^{x+2y} + xye^{x+2y}$ e $f_y = xe^{x+2y} + 2xye^{x+2y}$, e quindi i punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y(1 + x) = 0 \\ x(1 + 2y) = 0 \end{cases}$$

che ha due soluzioni: $(0, 0)$ e $(-1, -\frac{1}{2})$. Calcolando il determinante Hessiano si trova:

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

e quindi $(0, 0)$ è un punto di sella, e poi

$$H(-1, -\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0, \qquad f_{xx}(-1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-2} < 0$$

e quindi $(-1, -\frac{1}{2})$ è un punto di massimo relativo.

(ii) Anzitutto osserviamo che dei due punti critici, solo $(-1, -\frac{1}{2})$ è interno al dominio e $f(-1, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2}$. Studiamo la funzione sulla frontiera di T, che è un triangolo rettangolo.

Sui lati $\{(0, y), 0 \geq y \geq -3\}$ e $\{(x, 0), 0 \geq x \geq -3\}$ (i cateti del triangolo) la funzione è identicamente nulla.

Sul lato $\{(-2y - 3, , y)0 \geq y \geq -3\}$ (l'ipotenusa) la funzione diventa $\varphi(y) = f(-2y - 3, y) = (-2y^2 - 3y)e^{-3}$, che è crescente per $-3 \leq y \leq -\frac{3}{4}$, decrescente per $-\frac{3}{4} \leq y \leq 0$ e ha un massimo relativo in $-\frac{3}{4}$, corrispondente al punto $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$. Inoltre si ha $f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}) = \frac{9}{8}e^{-3}$. Dato che $\frac{1}{2}e^{-2} > \frac{9}{8}e^{-3}$ (equivale a $e > \frac{9}{4}$, ovvia perchè $e > 2,7$) possiamo concludere che $\max_T f = \frac{1}{2}e^{-2}$, assunto in $(-1, -\frac{1}{2})$, e $\min_T f = 0$, assunto nei punti di frontiera $\{(0, y), 0 \geq y \geq -3\}$ e $\{(x, 0), 0 \geq x \geq -3\}$ (del resto è ovvio che $f \geq 0$ in T e che $f = 0$ solo sui due cateti).