SOLUZIONI COMPITO A

ESERCIZIO 1

La funzione è definita negli intervalli $(0, e^3) \cup (e^3, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \frac{2}{\log x}}{1 - \frac{3}{\log x}} = 1$$

e quindi si prolunga con continuitá ponendo $y(0) = 1$. La funzione è positiva in $[0, e^2) \cup (e^3, +\infty)$, negativa in $(e^2, e^3)$ e si annulla per $x = e^2$. Si ha poi $\lim_{x \to e^{3+}} y(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x \to e^{3-}} y(x) = -\infty$, quindi $x = e^3$ è un asintoto verticale. In modo analogo, $\lim_{x \to \infty} y(x) = 1$, e quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale. La derivata prima vale

$$y' = -\frac{1}{x(\log x - 3)^2}$$

che è sempre negativa, e quindi la funzione è decrescente in $[0, e^3)$ e in $(e^3, +\infty)$. Infine, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^{-1}}{(\log x - 3)^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{2(\log x - 3)} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^{-2}}{2x^{-1}} = -\infty$$

e quindi la funzione ha la tangente verticale in $x = 0$.

ESERCIZIO 2.

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (1 + \alpha)\lambda + \alpha = 0; \qquad \lambda = \frac{(1 + \alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1}}{2} = 1, \alpha.$$

Per $\alpha \neq 2$, possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_1 = Ae^{2x}$, ottenendo $A = \frac{1}{2-\alpha}$. Quando $\alpha = 2$, cercando la soluzione particolare nella forma $y_1(x) = Axe^{2x}$, si trova $A = 1$. Riassumendo, l'integrale generale è:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^x + \frac{1}{2 - \alpha} e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha \neq 1, 2$$
$$y(x) = C_1 x e^x + C_2 e^x + e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha = 1$$
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + x e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha = 2.$$

ESERCIZIO 3

a)Razionalizzando, si trova $\sqrt{3 + n^{3/2}} - \sqrt{2 + n^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{3+n^{3/2}} + \sqrt{2+n^{3/2}}} \sim \frac{1}{2n^{3/4}}$, e quindi la serie non converge (confronto con la serie armonica con $\alpha = 3/4$).

b) Ora si ha $\log(3+n^{3/2}) - \log(2+n^{3/2}) = \log\left(1 + \frac{1}{2+n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, e quindi la serie converge.

ESERCIZIO 4

a) Moltiplicando numeratore e denominatore per $2 - i\sqrt{3}$, otteniamo $\frac{i\sqrt{3}-5}{2+i\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}i-7}{7} = i\sqrt{3} - 1$.

b)$i\sqrt{3} - 1 = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

c) Le radici quadrate sono: $\pm\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \pm\sqrt{2}(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

ESERCIZIO 5

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i punti critici: $(0,0)(0,2),(5,0)$ e $(5,2)$. Il determinante hessiano vale: $H(x,y) = 4xy - 10y - 4x + 10$, e quindi

$$H(0,0) = 10 > 0, f_{xx}(0,0) = -5 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è un punto di massimo locale}$$
$$H(0,2) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \text{ è un punto di sella}$$
$$H(5,0) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (5,0) \text{ è un punto di sella}$$
$$H(5,2) = 10 > 0, f_{xx}(5,2) = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad (5,2) \text{ è un punto di minimo locale}$$

ESERCIZIO 6

Si ha : $\frac{x^7+x^{14}}{x^7} = 1 + x^7 \to 1$ per $x \to 0$, e poi $\frac{x^7+o(x^8)}{x^7} = 1 + \frac{o(x^8)}{x^7} \to 1$ per $x \to 0$, e quindi le risposte esatte sono a) e d).

SOLUZIONI COMPITO B

ESERCIZIO 1

La funzione è definita negli intervalli $(0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \frac{3}{\log x}}{1 - \frac{2}{\log x}} = 1$$

e quindi si prolunga con continuitá ponendo $y(0) = 1$. La funzione è positiva in $[0, e^2) \cup (e^3, +\infty)$, negativa in $(e^2, e^3)$ e si annulla per $x = e^3$. Si ha poi $\lim\limits_{x\to e^{2+}} y(x) = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to e^{2-}} y(x) = +\infty$, quindi $x = e^2$ è un asintoto verticale. In modo analogo, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$, e quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale. La derivata prima vale

$$y' = \frac{1}{x(\log x - 2)^2}$$

che è sempre positiva, e quindi la funzione è crescente in $[0, e^2)$ e in $(e^2, +\infty)$. Infine, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{(\log x - 2)^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-1}}{2(\log x - 2)} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}}{2x^{-1}} = +\infty$$

e quindi la funzione ha la tangente verticale in $x = 0$.

ESERCIZIO 2

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 2\alpha = 0; \qquad \lambda = \frac{(2+\alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4}}{2} = 2, \alpha.$$

Per $\alpha \neq 1$, possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_1 = Ae^x$, ottenendo $A = \frac{1}{\alpha-1}$. Quando $\alpha = 1$, cercando la soluzione particolare nella forma $y_1(x) = Axe^x$, troviamo $A = -1$. Riassumendo, l'integrale generale è:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{\alpha - 1} e^x \qquad \text{per} \quad \alpha \neq 1, 2 \\ y(x) &= C_1 x e^{2x} + C_2 e^{2x} + e^x \qquad \text{per} \quad \alpha = 2 \\ y(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x \qquad \text{per} \quad \alpha = 1. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3

a)Razionalizzando, si trova $\sqrt{4+n^{5/2}} - \sqrt{3+n^{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{4+n^{5/2}}+\sqrt{3+n^{5/2}}} \sim \frac{1}{2n^{5/4}}$, e quindi la serie converge (confronto con la serie armonica con $\alpha = 5/4$).

b) Ora si ha $\log(4+n^{5/2}) - \log(3+n^{5/2}) = \log\left(1 + \frac{1}{3+n^{5/2}}\right) \sim \frac{1}{n^{5/2}}$, e quindi la serie converge.

ESERCIZIO 4

a) Moltiplicando numeratore e denominatore per $2 + i\sqrt{3}$, otteniamo $\frac{6\sqrt{3}i+2}{2-i\sqrt{3}} = 2\frac{7\sqrt{3}i-7}{7} = 2\sqrt{3}i - 2$.

b)$2\sqrt{3}i - 2 = 4(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

c) Le radici quadrate sono: $\pm 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \pm 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \pm(1 + \sqrt{3}i)$.

ESERCIZIO 5

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y^2 - 5y = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i punti critici: $(0,0)(0,5), (2,0)$ e $(2,5)$. Il determinante hessiano vale: $H(x,y) = 4xy - 4y - 10x + 10$, e quindi

$$\begin{aligned} &H(0,0) = 10 > 0, f_{xx}(0,0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è un punto di massimo locale} \\ &H(2,0) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (2,0) \text{ è un punto di sella} \\ &H(0,5) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,5) \text{ è un punto di sella} \\ &H(2,5) = 10 > 0, f_{xx}(2,5) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (2,5) \text{ è un punto di minimo locale} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si ha : $\frac{x^5+x^{10}}{x^5} = 1 + x^5 \to 1$ per $x \to 0$, e poi $\frac{x^5+o(x^6)}{x^5} = 1 + \frac{o(x^6)}{x^5} \to 1$ per $x \to 0$, e quindi le risposte esatte sono b) e c).

SOLUZIONI COMPITO C

ESERCIZIO 1

La funzione è definita negli intervalli $(0,e) \cup (e,+\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\frac{5}{\log x}}{1-\frac{1}{\log x}} = 1$$

quindi si prolunga con continuitá ponendo $y(0) = 1$. La funzione è positiva in $[0,e) \cup (e^5,+\infty)$, negativa in $(e,e^4)$ e si annulla per $x = e^5$. Si ha poi $\lim\limits_{x\to e^+} y(x) = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to e^-} y(x) = +\infty$, quindi $x = e$ è un asintoto verticale. In modo analogo, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 1$, e quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale. La derivata prima vale

$$y' = 4\frac{1}{x(\log x - 1)^2}$$

che è sempre positiva, e quindi la funzione è crescente in $[0,e)$ e in $(e,+\infty)$. Infine, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^{-1}}{(\log x - 1)^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^{-1}}{2(\log x - 1)} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^{-2}}{2x^{-1}} = +\infty$$

e quindi la funzione ha la tangente verticale in $x = 0$.

ESERCIZIO 2

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (4+\alpha)\lambda + 4\alpha = 0; \qquad \lambda = \frac{(4+\alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16}}{2} = 4, \alpha.$$

Per $\alpha \neq 2$, possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_1 = Ae^{2x}$, ottenendo $A = \frac{1}{2\alpha-4}$. Quando $\alpha = 2$, cercando la soluzione particolare nella forma $y_1(x) = Axe^{2x}$, troviamo $A = -\frac{1}{2}$. Riassumendo, l'integrale generale è:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{2\alpha - 4} e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha \neq 2, 4$$
$$y(x) = C_1 x e^{4x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{4} e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha = 4$$
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{2} x e^{2x} \qquad \text{per} \quad \alpha = 2.$$

ESERCIZIO 3

a)Razionalizzando, si trova $\sqrt{3+n^{7/4}} - \sqrt{2+n^{7/4}} = \frac{1}{\sqrt{3+n^{7/4}}+\sqrt{2+n^{7/4}}} \sim \frac{1}{2n^{7/8}}$, e quindi la serie non converge (confronto con la serie armonica con $\alpha = 7/8$).

b) Ora si ha $\log(3+n^{7/4})-\log(2+n^{7/4}) = \log\left(1+\frac{1}{2+n^{7/4}}\right) \sim \frac{1}{n^{7/4}}$, e quindi la serie converge.

ESERCIZIO 4

a) Moltiplicando numeratore e denominatore per $-\sqrt{3}-2i$, otteniamo $\frac{3\sqrt{3}+i}{2i-\sqrt{3}} = \frac{-7\sqrt{3}i-7}{7} = -i\sqrt{3}-1$.

b)$-1-i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$.

c) Le radici quadrate sono: $\pm\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}) = \pm\sqrt{2}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

ESERCIZIO 5

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2+2x=0 \\ y^2+5y=0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i punti critici: $(0,0)(0,-5),(-2,0)$ e $(-2,-5)$. Il determinante hessiano vale: $H(x,y) = 4xy+4y+10x+10$, e quindi

$$\begin{aligned}
&H(0,0)=10>0, f_{xx}(0,0)=2>0 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è un punto di minimo locale}\\
&H(0,-5)=-10<0 \quad \Rightarrow \quad (0,-5) \text{ è un punto di sella}\\
&H(-2,0)=-10<0 \quad \Rightarrow \quad (-2,0) \text{ è un punto di sella}\\
&H(-2,-5)=10>0, f_{xx}(-2,-5)=-2<0 \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ è un punto di massimo locale}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 6

Si ha : $\frac{x^9+x^{18}}{x^9} = 1+x^9 \to 1$ per $x\to 0$, e poi $\frac{x^9+o(x^{10})}{x^9} = 1+\frac{o(x^{10})}{x^9} \to 1$ per $x \to 0$, e quindi le risposte esatte sono a) e c).

SOLUZIONI COMPITO D

ESERCIZIO 1 La funzione è definita negli intervalli $(0,e^5)\cup(e^5,+\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\frac{1}{\log x}}{1-\frac{5}{\log x}} = 1$$

quindi si prolunga con continuitá ponendo $y(0)=1$. La funzione è positiva in $[0,e)\cup(e^5,+\infty)$, negativa in $(e,e^5)$ e si annulla per $x=e$. Si ha poi $\lim_{x\to e^{5+}} y(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to e^{5-}} y(x) = -\infty$, quindi $x=e^5$ è un asintoto verticale. In modo analogo, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$, e quindi la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale. La derivata prima vale

$$y' = -4\frac{1}{x(\log x-5)^2}$$

che è sempre negativa, e quindi la funzione è decrescente in $[0,e^5)$ e in $(e^5,+\infty)$. Infine, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^{-1}}{(\log x - 5)^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{-1}}{(\log x - 5)} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-2}}{x^{-1}} = -\infty$$

e quindi la funzione ha la tangente verticale in $x = 0$.

ESERCIZIO 2

Equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (3+\alpha)\lambda + 3\alpha = 0; \qquad \lambda = \frac{(3+\alpha) \pm \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 9}}{2} = 3, \alpha.$$

Per $\alpha \neq 1$, possiamo cercare la soluzione particolare nella forma $y_1 = Ae^x$, ottenendo $A = \frac{1}{2\alpha - 2}$. Quando $\alpha = 1$, cercando la soluzione particolare nella forma $y_1(x) = Axe^x$, troviamo $A = -\frac{1}{2}$. Riassumendo, l'integrale generale è:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2\alpha - 2} e^x \qquad \text{per} \quad \alpha \neq 1, 3$$
$$y(x) = C_1 x e^{3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4} e^x \qquad \text{per} \quad \alpha = 3$$
$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2} x e^x \qquad \text{per} \quad \alpha = 1.$$

ESERCIZIO 3

a)Razionalizzando, si trova $\sqrt{4 + n^{9/4}} - \sqrt{3 + n^{9/4}} = \frac{1}{\sqrt{4+n^{9/4}} + \sqrt{3+n^{9/4}}} \sim \frac{1}{2n^{9/8}}$, e quindi la serie converge (confronto con la serie armonica con $\alpha = 9/4$).

b) Ora si ha $\log(4+n^{9/4}) - \log(3+n^{9/4}) = \log\left(1 + \frac{1}{3+n^{9/4}}\right) \sim \frac{1}{n^{9/4}}$, e quindi la serie converge.

ESERCIZIO 4

a)Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{3} - 2i$, otteniamo $\frac{\sqrt{3}-5i}{\sqrt{3}+2i} = \frac{-7\sqrt{3}i - 7}{7} = -i\sqrt{3} - 1$.

b)$-1 - i\sqrt{3} = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3})$.

c) Le radici quadrate sono: $\pm\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \pm\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$.

ESERCIZIO 5

Annullando le derivate prime, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 5x = 0 \\ y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

dal quale si ricavano i punti critici: $(0,0)(0,-2), (-5,0)$ e $(-5,-2)$. Il determinante hessiano vale: $H(x,y) = 4xy + 10y + 4x + 10$, e quindi

$H(0,0) = 10 > 0, f_{xx}(0,0) = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$ è un punto di minimo locale
$H(0,-2) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,-2)$ è un punto di sella
$H(-5,0) = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-5,0)$ è un punto di sella
$H(-5,-2) = 10 > 0, f_{xx}(-5,-2) = -5 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$ è un punto di massimo locale

ESERCIZIO 6

Si ha : $\frac{x^6+x^{12}}{x^6} = 1 + x^6 \to 1$ per $x \to 0$, e poi $\frac{x^6+o(x^7)}{x^6} = 1 + \frac{o(x^7)}{x^6} \to 1$ per $x \to 0$, e quindi le risposte esatte sono b) e d).