

INGEGNERIA MECCANICA
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE IeII
PROVA SCRITTA DEL 12-01-2007

COMPITO A

Cognome

Nome

Matricola

ESERCIZIO 1

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = x^2 e^{-2x}$ e $y = x e^{2x^2}$, per $1 \leq x \leq 2$.

ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-2y} \log x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Una volta determinata la soluzione $y(x)$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + (\log x)^{4/5}}}{\sqrt{(\log x)^{5/4} + \log x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}.$$

ESERCIZIO 4

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + x$ nel triangolo del piano xy di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$.

ESERCIZIO 5

Determinare il dominio di esistenza della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(xy)}{\sqrt{x} - 2}}$$

e rappresentarlo graficamente.

ESERCIZIO 6

Supponiamo che la funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ sia decrescente in $[1, 2]$ e crescente in $[2, 3]$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere in conseguenza di tale proprietà, giustificando la risposta. Per le affermazioni false, fornire dei controesempi anche solo grafici.

- a) f ha un minimo in 2; b) f è derivabile in $(1, 3)$;
c) f è convessa in $[1, 3]$; d) f non può avere una cuspidè in 2.

INGEGNERIA MECCANICA
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE IeII
PROVA SCRITTA DEL 12-01-2007

COMPITO B

Cognome

Nome

Matricola

ESERCIZIO 1

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = x^2 e^{-3x}$ e $y = x e^{3x^2}$, per $1 \leq x \leq 2$.

ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-3y} \log x \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Una volta determinata la soluzione $y(x)$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + (\log x)^{2/3}}}{\sqrt{(\log x)^{4/5} + \log x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)}.$$

ESERCIZIO 4

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - y^2x + y$ nel triangolo del piano xy di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$.

ESERCIZIO 5

Determinare il dominio di esistenza della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(2xy)}{\sqrt{x} - 3}}$$

e rappresentarlo graficamente.

ESERCIZIO 6

Supponiamo che la funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ sia crescente in $[1, 2]$ e decrescente in $[2, 3]$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere in conseguenza di tale proprietà, giustificando la risposta. Per le affermazioni false, fornire dei controesempi anche solo grafici.

- a) f è derivabile in $(1, 3)$; b) f ha un massimo in 2;
c) f è concava in $[1, 3]$; d) f non può avere una cuspidi in 2.

INGEGNERIA MECCANICA
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE IeII
PROVA SCRITTA DEL 12-01-2007

COMPITO C

Cognome

Nome

Matricola

ESERCIZIO 1

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = xe^{-2x^2}$ e $y = x^2e^{2x}$, per $1 \leq x \leq 2$.

ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-2y} \log x \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Una volta determinata la soluzione $y(x)$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\log x + (\log x)^{4/5}}}{\sqrt{(\log x)^{6/7} + (\log x)^{5/6}}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\log x}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}.$$

ESERCIZIO 4

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + 8x$ nel triangolo del piano xy di vertici $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, 0)$.

ESERCIZIO 5

Determinare il dominio di esistenza della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(3xy)}{\sqrt{x} - 2}}$$

e rappresentarlo graficamente.

ESERCIZIO 6

Supponiamo che la funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ sia decrescente in $[1, 2]$ e crescente in $[2, 3]$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere in conseguenza di tale proprietà, giustificando la risposta. Per le affermazioni false, fornire dei controesempi anche solo grafici.

- a) f è convessa in $[1, 3]$; b) f non può avere una cuspide in 2;
c) f ha un minimo in 2; d) f è derivabile in $(1, 3)$.

INGEGNERIA MECCANICA
CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE IeII
PROVA SCRITTA DEL 12-01-2007

COMPITO D

Cognome

Nome

Matricola

ESERCIZIO 1

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $y = xe^{-3x^2}$ e $y = x^2e^{3x}$, per $1 \leq x \leq 2$.

ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-y} \log x \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Una volta determinata la soluzione $y(x)$, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(\log x)^{3/4} + \log x}}{\sqrt{(\log x)^{7/8} + (\log x)^{6/7}}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{(\log x)^3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{\log x}\right)}.$$

ESERCIZIO 4

Determinare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - y^2x + 8y$ nel triangolo del piano xy di vertici $(0, 0)$, $(0, 4)$ e $(4, 0)$.

ESERCIZIO 5

Determinare il dominio di esistenza della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\log(4xy)}{\sqrt{x} - 1}}$$

e rappresentarlo graficamente.

ESERCIZIO 6

Supponiamo che la funzione $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ sia crescente in $[1, 2]$ e decrescente in $[2, 3]$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere in conseguenza di tale proprietà, giustificando la risposta. Per le affermazioni false, fornire dei controesempi anche solo grafici.

- a) f non può avere una cuspidi in 2; b) f è concava in $[1, 3]$;
c) f è derivabile in $(1, 3)$; d) f ha un massimo in 2.