Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
20 Gennaio 2017

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti tre punti dello spazio euclideo:*

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare che P, Q ed R non sono collineari. Denotiamo con T il triangolo avente come vertici i tre punti P, Q ed R.*
2. *Calcolare il perimetro del triangolo T.*
3. *Calcolare l'area del triangolo T.*
4. *Calcolare la distanza di P dalla retta passante per Q ed R.*

Soluzione Esercizio 1.

1. *Dobbiamo verificare che i due vettori $Q - P = (0, -3, -3)^t$ e $R - P = (1, -3, -2)^t$ sono linearmente indipendenti. Questo segue subito dalla definizione di indipendenza lineare: infatti il vettore $\alpha(0, -3, -3)^t + \beta(1, -3, -2)^t = (\alpha, -3\alpha - 3\beta, -3\alpha - 2\beta)^t$ è nullo se e solo se $\alpha = \beta = 0$.*
2. *Dobbiamo calcolare il numero $||Q - P|| + ||R - P|| + ||R - Q||$, dove $||\cdot||$ denota la usuale norma euclidea. Si ha*
$$||Q - P|| + ||R - P|| + ||R - Q|| = \sqrt{18} + \sqrt{14} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(4 + \sqrt{7})$$
3. *L'area del triangolo cercata è la metà dell'area del parallelogramma generato dai vettori $Q - P$ e $R - P$. Sappiamo che l'area di tale parallelogramma è uguale alla norma del prodotto vettoriale $(Q - P) \wedge (R - P)$. Si ha $||(Q - P) \wedge (R - P)|| = ||(-3, -3, 3)|| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ per cui*
$$Area(T) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$
4. *Sia r la retta passante per Q ed R. La distanza tra P ed r è uguale alla distanza tra P e la sua proiezione ortogonale su r. Per cui essa è uguale alla lunghezza h dell'altezza del triangolo T relativa al vertice P.*

Dalla nota formula Area(T)=(base)x(altezza)/2, sappiamo che l'area di T è uguale a $h||R-Q||/2$ da cui deduciamo:

$$dist(P,r) = h = \frac{2Area(T)}{||R-Q||} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

Esercizio 2. *Sia* $T_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ *l'operatore lineare definito da*

$$T_k(p)(t) := p(0)(1+t) + p'(0)(2t + kt^2) + \frac{1}{2}p''(0)(kt + 2t^2)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$*; dove* p' *e* p'' *denotano la derivata prima e seconda di* p*, rispettivamente e la notazione* $q(0)$ *denota la valutazione del polinomio* q *nel numero* 0*.*

1. *Scrivere la matrice che rappresenta* T_k *nella base standard* $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ *di* $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$*;*
2. *Determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo di* T_k *in funzione di* $k \in \mathbb{R}$*;*
3. *Determinare lo spettro (reale) di* T_k *in funzione di* $k \in \mathbb{R}$*;*
4. *Determinare gli autospazi di* T_k*, in funzione di* $k \in \mathbb{R}$*;*
5. *Determinare per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *l'endomorfismo* T_k *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$*.*

Soluzione Esercizio 2.

1. *Si ha:* $T_k(1) = 1 + t$, $T_k(t) = 2t + kt$ *e* $T_k(t^2) = kt + 2t^2$*, per cui la matrice associata a* T_k *nella base standard* $\mathcal{B}$ *è*
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}$$
2. *Dato che dim Ker* $(T_k) =$ *dim Ker* (A_k) *e che dim Im* $(T_k) =$ *dim Im* (A_k)*, é sufficiente determinare immagine e nucleo di* A_k*. Effettuiamo una facile riduzione a scala*
$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 0 & 0 & 4-k^2 \end{pmatrix}$$
e deduciamo che $rg(A_2) = rg(A_{-2}) = 2$ *e che* A_k *ha rango massimo (uguale a tre) per ogni* $k \neq \pm 2$*. Per cui*
$$\textit{dim Ker } (T_k) = \begin{cases} 1 & \textit{se } k = 2 \textit{ oppure } k = -2; \\ 0 & \textit{altrimenti;} \end{cases}$$
$$\textit{dim Im } (T_k) = \begin{cases} 2 & \textit{se } k = 2 \textit{ oppure } k = -2; \\ 3 & \textit{altrimenti;} \end{cases}$$

3. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A_k:

$$p_{A_k}(x) = det\ (A_k - x1_3) = (1-x)((2-x)^2-k^2) = (1-x)(x-(2-k))(x-(k+2))$$

per cui lo spettro di A_k è uguale a $Sp(A_k) = \{1, 2-k, k+2\}$. Dobbiamo specificare gli elementi di distinti dell'insieme $\{1, 2-k, k+2\}$. Si ha

$$Sp(T_k) = \begin{cases} \{1,3\} & se\ k=1\ oppure\ se\ k=-1 \\ \{1,2\} & se\ k=0 \\ \{1, 2-k, k+2\} & altrimenti \end{cases}$$

4. Determiniamo l'autospazio di A_k relativo all'autovalore 1:

$$V_1(A_k) = Ker(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}) = Span(\begin{pmatrix} k^2-1 \\ 1 \\ -k \end{pmatrix}).$$

In particolare osserviamo che la molteplicità geometrica di 1 è uno per ogni $k \in \mathbb{R}$;
Determiniamo l'autospazio di A_k relativo all'autovalore $2-k$:

$$\begin{aligned} V_{2-k}(A_k) &= Ker(\begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 1 & k & k \\ 0 & k & k \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k(k-1) & k(k-1) \\ 0 & k & k \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & k(k-1) & k(k-1) \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Discutiamo separatamente i due casi: $k=0$ e $k \neq 0$.
Se $k=0$

$$V_2(A_0) = Ker(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

che ha quindi dimensione due.
Se $k \neq 0$*,*

$$V_{2-k}(A_k) \quad = Ker(\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \quad = Span(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}))$$

che ha quindi dimensione 1*.*
Determiniamo l'autospazio di A_k *relativo all'autovalore* $k+2$*. Si noti che se* $k=0$*,* $k+2=2-k$*, per cui possiamo assumere* $k \neq 0$*, dato che il caso* $k=0$ *è stato già trattato:*

$$\begin{aligned} V_{k+2}(A_k) \quad &= Ker(\begin{pmatrix} -k-1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & k \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & -k & k \\ k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & -k & k \\ 0 & k & -k \\ 0 & k(k+1) & -k(k+1) \end{pmatrix}) \\ &= Ker(\begin{pmatrix} 1 & -k & k \\ 0 & k & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= Span(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dal fatto che $k \neq 0$*. Per determinare gli autospazi di* T_k *usiamo l'isomorfismo* $F_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}^3$ *e otteniamo:*

$$V_1(T_k) = Span((k^2-1) + t - kt^2)$$

$$V_{2-k}(T_k) = \begin{cases} Span(t, t^2) & se\ k=0; \\ Span(-t+t^2) & altrimenti. \end{cases}$$

$$V_{k+2}(T_k) = \begin{cases} Span(t, t^2) & se\ k=0; \\ Span(t+t^2) & altrimenti. \end{cases}$$

5. *Dall'analisi degli autospazi svolta nel punto precedente, otteniamo le seguenti informazioni:*

   - *Se* $k = 0$, *il polinomio caratteristico di* T_0 *è* $(1-x)(x-2)^2$; *l'autovalore* 1 *ha molteplicità algebrica uno e molteplicità geometrica uno; l'autovalore* 2 *ha molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica due. Dato che lo spettro di* T_0 *è reale, concludiamo che* T_0 *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$.
   - *Se* $k = 1$ *o* $k = -1$, *il polinomio caratteristico di* T_k *è* $(1-x)^2(x-3)$; *l'autovalore* 1 *ha molteplicità algebrica due e molteplicità geometrica uno; pertanto* T_k *non è diagonalizzabile in questo caso.*
   - *Se* k *non è uguale a* 0, 1 *o* -1, T_k *ha tre autovalori (reali) distinti e pertanto è diagonalizzabile (su* $\mathbb{R}$*).*

Esercizio 3. *Ridurre a forma canonica affine la conica* $\mathcal{C}_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, p(x, y) = 0\}$ *dove* $p(x, y) := x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 3y + 2$.

Soluzione Esercizio 3. *La matrice che rappresenta la conica e la sottomatrice che rappresenta la sua parte quadratica sono rispettivamente*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui, ponendo $X = (x, y)^t$ *e* $\tilde{X} := (x, y, 1)$ *si ha* $p(X) = {}^t\tilde{X}A\tilde{X}$. *Il polinomio caratteristico di* A_2 *è* $p_{A_2}(x) = x(x - 2)$ *e quindi* $Sp(A_2) = \{\lambda_1 := 2 > \lambda_2 := 0\}$. *Gli autospazi sono*

$$V_{\lambda_1}(A_2) = ker(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}) = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

e

$$V_{\lambda_2}(A_2) = ker(A_2) = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Una base ortonormale di autovettori per A_2 *è data da* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ *dove*

$$v_1 := \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la matrice

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha v_1 *e* v_2 *come colonne. Effettuiamo il cambiamento di coordinate* $X = BX'$, *dove* $X' := (x', y')$, *ovvero*

$$x := \tfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y', \quad y := -\tfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y'$$

otteniamo

$$p(X) = p_1(BX') := 2x'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{5\sqrt{2}}{2}y' + 2.$$

Consideriamo il cambiamento di coordinate $X' := X'' + C$, *dove* $C = (c_1, c_2)^t$ *é un vettore da scegliersi opportunamente. Si ha*

$$p_1(X') = p_1(X'' + C) = 2x''^2 + 2(2c_1 - \frac{\sqrt{2}}{4})x'' + \frac{5\sqrt{2}}{2}y'' + p_1(c_1, c_2).$$

Scegliamo $c_1 := \frac{\sqrt{2}}{8}$ *cosi da "eliminare" il coefficiente di* x' *e poi scegliamo* c_2 *in maniera da eliminare il termine noto (se possibile):*

$$p_1(\frac{\sqrt{2}}{8}, c_2) = \frac{124}{64} + \frac{5}{\sqrt{2}}c_2.$$

Poniamo $c_2 := -\frac{31\sqrt{2}}{80}$. *Per cui effettuando il cambiamento di coordinate*

$$x' := x'' + \tfrac{\sqrt{2}}{8}, \quad y' := y'' - \tfrac{31\sqrt{2}}{80}$$

otteniamo che p *è metricamente equivalente al polinomio*

$$p_2(X'') := 2x''^2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}y''.$$

Effettuiamo il cambio di coordinate (affine):

$$x'' = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x''', \quad y'' = -\tfrac{\sqrt{2}}{5}y'''$$

otteniamo che p *è affinemente equivalente a*

$$p_3(x''', y''') = x'''^2 - y'''.$$

Per cui la conica $\mathcal{C}_p$ *è affinemente equivalente ad una parabola.*

Esercizio 4. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 8 & 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per l'immagine di A;*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per il nucleo di A;*

3. *Sia $\mathbf{b} := (-1, 5, 13)^t$. Descrivere l'insieme dei vettori $X \in \mathbb{R}^4$ tali che $AX = \mathbf{b}$.*

4. *L'insieme di tutti i vettori $X \in \mathbb{R}^4$ tali che $AX = \mathbf{b}$, trovato nel punto precedente, è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? (Giustificare la risposta)*

Soluzione Esercizio 4.
Effetuiamo una riduzione a scala della seguente matrice completa:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & x \\ 2 & 3 & -4 & 1 & y \\ 8 & 5 & -2 & -3 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & x \\ 0 & 7 & -14 & 7 & y-2x \\ 0 & 21 & -42 & 21 & z-8x \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & -3 & x \\ 0 & 7 & -14 & 7 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x-3y+z \end{array}\right)$$

Deduciamo che che l'immagine di A ha come base la prima e la seconda colonna di A, per cui le seguenti sono equazioni parametriche per $Im\,A$:

$$\begin{cases} x &= t-2s, \\ y &= 2t+3s, \quad (s,t \in \mathbb{R}) \\ z &= 8t+5s. \end{cases}$$

Inoltre, sempre dalla riduzione a scala di sopra, otteniamo che $Im\,A$ ha equazioni cartesiane $2x+3y-z=0$.
Ancora dalla riduzione a scala eseguita sopra, deduciamo che il nucleo di A ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 &= -x_3+x_4 \\ x_2 &= 2x_3-x_4 \end{cases}$$

da cui otteniamo immediatamente una base; essa è data dai vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che forniscono equazioni parametriche per Ker A:

$$\begin{cases} x_1 &= -t+s, \\ x_2 &= 2t-s, \quad (s,t \in \mathbb{R}) \\ x_3 &= t, \\ x_4 &= s \end{cases}$$

Si vede subito che il vettore $\mathbf{b}$ *è dato da*

$$\mathbf{b} = A^1 + A^2$$

per cui $\mathbf{b}$ *appartiene all'immagine di* A *e* $AX_0 = \mathbf{b}$ *dove* $X_0 = (1,1,0,0)^t$. *Per il teorema di struttura, sappiamo che l'insieme degli* $X \in \mathbb{R}^4$ *tale che* $AX = \mathbf{b}$ *è il sottospazio affine di* $\mathbb{R}^4$ *dato da*

$$Ker\, A + X_0.$$

Esso non è un sottospazio vettoriale poichè non contiene l'origine.

Esercizio 5. *Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ dato dalle seguenti equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x - z + 2w &= 0 \end{cases}$$

1. *Trovare una base per U;*
2. *Trovare una base ortonormale di U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*
3. *Si consideri il vettore $P = (1, 2, 0, 2)^T$ di $\mathbb{R}^4$. Trovare la proiezione ortogonale di P su U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*
4. *Calcolare la distanza di P da U (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$);*
5. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta ortogonale a U e passante per P (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$).*

Soluzione Esercizio 5.

1. *Riduciamo il sistema a scala, e troviamo che esso è equivalente al sistema:*

$$\begin{cases} x &= z - 2w \\ y &= 2z - 4w \end{cases}$$

per cui si ottiene subito la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ di U dove

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Il prodotto scalare tra v_1 e v_2 è uguale a $v_1 \cdot v_2 = -2 - 8 = -10 \neq 0$, per cui $\mathcal{B}$ non è una base ortogonale. Per ortogonalizzarla utilizziamo l'algoritmo di Gram-Schmidt: poniamo*

$$v_2' := v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 + \frac{5}{3} v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ed otteniamo un vettore ortogonale a v_1. Possiamo trascurare il coefficiente $\frac{1}{3}$ e considerare il vettore

$$\overline{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

la cui norma è $||\overline{v_2}|| = \sqrt{39}$*. Una base ortornormale di* U *è quindi data da* $\{E_1, E_2\}$ *dove*

$$E_1 := \frac{1}{||v_1||} v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed

$$E_2 := \frac{1}{||\overline{v_2}||} \overline{v_2} = \frac{1}{\sqrt{39}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. *Come abbiamo visto a lezione, la proiezione ortogonale di* P *su* U *è il vettore* P' *di* U *dato dalla seguente formula:*

$$P' = (P \cdot E_1)E_1 + (P \cdot E_2)E_2 = \frac{5}{6} v_1 + \frac{1}{39} \overline{v_2} = \frac{1}{78} \begin{pmatrix} 63 \\ 126 \\ 75 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. *La distanza tra* P *e* U *è uguale alla distanza tra* P *e* P'*:*

$$dist(P, U) = ||P - P'|| = \frac{1}{78} || \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -75 \\ 150 \end{pmatrix} || = \frac{5\sqrt{130}}{26}$$

5. *La retta passante per* P *ed ortogonale ad* U *coincide con la retta passante per* P *e per la sua proiezione ortogonale su* U*. Per cui ha equazioni parametriche*

$$P + t(P' - P) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$