Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli
15 Febbraio 2017

Esercizio 1. *Si considerino i due sottospazi π_1 e π_2 di $\mathbb{R}^3$ dati dalle seguenti equazioni:*

$$\pi_1 : 2x - y + z = 0; \quad \pi_2 : x + y - z = 0.$$

1. *Trovare una base di π_1.*

2. *Trovare una base di π_2.*

3. *Trovare una base di $\pi_1 \cap \pi_2$.*

4. *Determinare le matrici che rappresentano rispettivamente la proiezione ortogonale su $\pi_1 \cap \pi_2$, su π_1 e su π_2, rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$.*

5. *Calcolare la distanza di $P := (6, -6, 6)$ rispettivamente da $\pi_1 \cap \pi_2$, da π_1 e da π_2.*

Soluzione Esercizio 1. *L' equazioni dei due piani π_1 e π_2 forniscono i due vettori normali $N_1 := (2, -1, 1)^t$ e $N_2 := (1, 1, -1)^t$. Notiamo che $N_1 \cdot N_2 = 0$, per cui i due piani sono ortogonali e quindi $N_1 \in \pi_2$ e $N_2 \in \pi_1$. Denotiamo con $\pi_0 := \pi_1 \cap \pi_2$ l'intersezione di π_1 e π_2. Essa è la retta di $\mathbb{R}^3$ generata dal prodotto vettoriale $N_1 \wedge N_2 = (0, 1, 1)^t$ di N_1 e N_2. Questo ci dice che una base per π_1 è $\{N_1 \wedge N_2, N_2\}$ ed una base per π_2 è $\{N_1 \wedge N_2, N_1\}$. I tre vettori $\{N_1 \wedge N_2, N_2, N_1\}$ formano una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Normalizzando, otteniamo la base ortonormale*

$$\mathcal{B} := \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Sia $Pr_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione ortogonale su π_i, per $i = 0, 1, 2$. Nella base $\mathcal{B}$, l' applicazione lineare Pr_i è rappresentata dalla matrice A_i data da

$$A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice che rappresenta Pr_i nella base standard di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo cambiare base: sia

$$B := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

la matrice di cambiamento di base dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$. Abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}=\mathbf{1}_3"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "\mathbf{1}_3"'] \arrow[r, "Pr_i"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\mathbf{1}_3"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}=\mathbf{1}_3"] \\
\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "L_B"] \arrow[r, "L_{A_i}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_B"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

dove $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base standard di $\mathbb{R}^3$. Per cui la matrice che rappresenta Pr_i nella base $\mathcal{C}$ è $C_i := BA_iB^{-1}$. Poichè B è una matrice ortogonale, $B^{-1} = B^t$. Per cui le tre matrici C_0, C_1 e C_2 cercate si ottengono con un semplice calcolo. Otteniamo

$$C_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La proiezione di P sul sottospazio π_i è il vettore C_iP:

$$Pr_{\pi_1\cap\pi_2}(P) = 0, \quad Pr_{\pi_1}(P) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Pr_{\pi_2}(P) = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La distanza di P da π_i è uguale a $||P - Pr_i(P)||$:

$$dist(P, \pi_1 \cap \pi_2) = ||P|| = 6\sqrt{3},$$

$$dist(P, \pi_1) = ||\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}|| = 4||\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}|| = 4\sqrt{6},$$

$$dist(P, \pi_2) = ||\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}|| = 2||\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}|| = 2\sqrt{3}.$$

Esercizio 2. *Ridurre a forma canonica affine la conica di equazione*

$$p(x,y) := \frac{11}{4}x_1^2 + \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2 + 6x_1 + 6\sqrt{3}x_2 - 12 = 0$$

specificando i cambiamenti di coordinate.

Soluzione Esercizio 2. *Le matrici associate a p ed alla sua parte quadratica sono rispettivamente*

$$A := \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} & 3\sqrt{3} \\ 3 & 3\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}, \quad A' := \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A' è $x^2 - 5x + 6$ le cui radici sono $Sp(A') = \{3, 2\}$. L'autospazio di autovalore 3 è generato dal vettore unitario $v_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)$ e l'autospazio di autovalore 2 è generato dall'autovettore unitario $v_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$. Sia B la matrice che ha per colonne rispettivamente v_1 e v_2. Poichè $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, la matrice B è ortogonale. Effetuiamo il cambiamento di coordinate metrico $X = BX'$ e otteniamo che p è metricamente equivalente al polinomio

$$p'(x_1', x_2') = 3x_1'^2 + 2x_2'^2 + 12y' - 12.$$

Effetuiamo il cambiamento di coordinate metrico $x' = x''$, $y' = y'' - 3$, ed otteniamo che p è metricamente equivalente al polinomio

$$p''(x_1'', x_2'') = 3x_1''^2 + 2x_2''^2 - 30.$$

Dividiamo per 30, ed effettuiamo il cambiamento di coordinate affine $x_1'' = \sqrt{10}x$, $x_2'' = \sqrt{15}y$ e otteniamo che p é affinemente equivalente al polinomio

$$q(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Concludiamo che la conica iniziale é affinemente equivalente ad un'ellisse reale.

Esercizio 3. *Studiare il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x + y + 3z &= k; \\ kx + 2y + z &= 2 \\ x + y - kz &= 0 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 3. *La matrice completa del sistema*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ k & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -k & 0 \end{array}\right)$$

è equivalente per righe alla matrice a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 2-k & 1-3k & 2-k^2 \\ 0 & 0 & -k-3 & -k \end{array}\right).$$

Se $k \neq 2$ e $k \neq 3$ la matrice del sistema ha rango massimo, per cui il sistema ammette un'unica soluzione che si trova con procedimento all'indietro:

$$x = -2 - \tfrac{k(1-3k)}{(2-k)(k+3)}, \quad y = \tfrac{(2-k^2)(k+3)-k(1-3k)}{(2-k)(k+3)}, \quad z = \tfrac{k}{k+3}.$$

Se $k = -3$ il sistema è incompatibile. Se $k = 2$, il sistema ammette infinite soluzioni che formano la retta affine

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + Span(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

Esercizio 4. *Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definita come segue:*

$$T_k(p)(t) := kp(0) + p'(0)(t + (3-k)t^2) + \frac{1}{2}p''(0)((k-1)t + (2k-1)t^2)$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta T_k nella base standard di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.*
2. *Si determinino i valori di k per i quali T_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.*
3. *Si dica per quali valori di k esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ nella quale T_k è rappresentato da una matrice diagonale.*
4. *Si determini una base ortogonale di autovettori di T_k nel caso in cui $k = 2$.*

Soluzione Esercizio 4. *La matrice che rappresenta T_k nell abase standard di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ è*

$$A_k := \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 3-k & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione lineare T_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se la matrice A_k lo è. Il polinomio caratteristico di A_k è

$$P_{A_k}(x) = (k-x)(x^2-2kx+(k^2-2k+2)) = (k-x)(x-k+\sqrt{2(k-1)})(x-k-\sqrt{2(k-1)})$$

per cui lo spettro di A_k è l'insieme $\{k, k+\sqrt{2(k-1)}, k-\sqrt{2(k-1)}\}$. Lo spettro reale di A_k è quindi data da

$$Sp_{\mathbb{R}}(A_k) = \begin{cases} \{k, k+\sqrt{2(k-1)}, k-\sqrt{2(k-1)}\} & se\ k > 1; \\ \{1\} & se\ k = 1; \\ \{k\} & se\ k < 1. \end{cases}$$

Se $k > 1$, A_k ha tre autovalori reali distinti, per cui è diagonalizzabile. Se $k = 1$ la matrice A_1 non è diagonalizzabile in quanto 1 ha molteplicità algebrica tre ma molteplicità geometrica due. Se $k < 1$ gli autovalori di T_k non sono tutti reali, per cui non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In conclusione, T_k è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $k > 1$. In questo caso, la base formata di autovettori è ortogonale se e solo se A_k è una matrice simmetrica (grazie al teorema spettrale). Questo accade se e solo se $k = 2$. In questo caso una base di autovettori è data da

$$\{e_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\}$$

Esercizio 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i due punti* $P = (2, 2, 3)$, $Q = (3, 5, 4)$ *ed il piano* π *di equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 2t + 6s \\ z &= 2 + 3s \end{cases} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

1. *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r *passante per i punti* P *e* Q.
2. *Determinare un'equazione cartesiana del piano* π.
3. *Determinare la posizione reciproca e la distanza tra il piano* π *e la retta* r.

Soluzione Esercizio 5. *Un' equazione parametrica della retta* r *è data da* $r : P + t(Q - P)$, *ovvero*

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

espicitando il parametro, otteniamo equazioni cartesiane per r

$$r : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

Il piano π *è il sottospazio affine* $\pi = P' + \pi_0$ *dove* $P' = (1, 2, 2)^t$ *e* $\pi_0 = Span\{(1, 1, 0)^t, (0, 2, 1)^t\}$. *Per trovare un vettore normale a* π_0 *possiamo fare il prodotto vettoriale dei suoi generatori:*

$$N := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Un'equazione cartesiana per π *è quindi* $\pi : N \cdot X = N \cdot P'$ *ovvero*

$$\pi : x - y + 2z = 3.$$

Il vettore direttore di r *è* $(1, 3, 1)^t$ *ed appartiene al piano* π_0. *Per cui* r *e* π *sono paralleli. Poichè* P *non appartiene a* π *ma appartiene ad* r, *deduciamo* *che la retta r non giace sul piano π. La distanza tra r e π è data da*

$$\begin{aligned}
dist(r,\pi) &= dist(P+r_0, P'+\pi_0) \\
&= dist(P-P', \pi_0) \\
&= ||Pr_N(P-P')|| \\
&= ||\frac{(P-P')\cdot N}{N\cdot N}N|| \\
&= \frac{|(P-P')\cdot N|}{||N||} \\
&= \frac{3}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$