

Esercizio 1. Si considerino i due sottospazi π_1 e π_2 di \mathbb{R}^3 dati dalle seguenti equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y + z = 0; \quad \pi_2 : x + y - z = 0.$$

1. Trovare una base di π_1 .
2. Trovare una base di π_2 .
3. Trovare una base di $\pi_1 \cap \pi_2$.
4. Determinare le matrici che rappresentano rispettivamente la proiezione ortogonale su $\pi_1 \cap \pi_2$, su π_1 e su π_2 , rispetto alla base standard di \mathbb{R}^3 .
5. Calcolare la distanza di $P := (6, -6, 6)$ rispettivamente da $\pi_1 \cap \pi_2$, da π_1 e da π_2 .

Esercizio 2. *Ridurre a forma canonica affine la conica di equazione*

$$p(x, y) := \frac{11}{4}x_1^2 + \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1x_2 + 6x_1 + 6\sqrt{3}x_2 - 12 = 0$$

specificando i cambiamenti di coordinate.

Esercizio 3. Studiare il seguente sistema di equazioni lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + 3z = k; \\ kx + 2y + z = 2 \\ x + y - kz = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a due. Al variare del parametro reale k si consideri l'applicazione lineare $T_k : \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definita come segue:

$$T_k(p)(t) := kp(0) + p'(0)(t + (3 - k)t^2) + \frac{1}{2}p''(0)((k - 1)t + (2k - 1)t^2)$$

1. Scrivere la matrice che rappresenta T_k nella base standard di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.
2. Si determinino i valori di k per i quali T_k è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
3. Si dica per quali valori di k esiste una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ nella quale T_k è rappresentato da una matrice diagonale.
4. Si determini una base ortogonale di autovettori di T_k nel caso in cui $k = 2$.

Esercizio 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i due punti $P = (2, 2, 3)$, $Q = (3, 5, 4)$ ed il piano π di equazioni parametriche:*

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t + 6s \\ z = 2 + 3s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

1. *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti P e Q .*
2. *Determinare un'equazione cartesiana del piano π .*
3. *Determinare la posizione reciproca e la distanza tra il piano π e la retta r .*