Prova scritta di Geometria 1
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

4 Luglio 2017

Esercizio 1. *Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, trovare, se esistono, tutte le soluzioni del seguente sistema lineare nelle variabili reali x, y, z:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + (h+1)y - z &=& 3, \\ 3x + (2h-1)y - z &=& 3, \\ hx + 2hz &=& -h^2, \\ x + (h-2)y &=& 0, \\ (1+h)x + (h-2)y + 2hz &=& -h. \end{array}\right.$$

Soluzione Esercizio 1. *La matrice associata al sistema é*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & (h+1) & -1 & 3 \\ 3 & (2h-1) & -1 & 3 \\ h & 0 & 2h & -h^2, \\ 1 & (h-2) & 0 & 0 \\ (1+h) & (h-2) & 2h & -h. \end{array}\right)$$

Riducendo a scala otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (h-2) & 0 & 0 \\ 0 & 5-h & -1 & 3 \\ 0 & 2h-h^2 & 2h & -h^2, \\ 0 & 5-h & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -h+h^2. \end{array}\right)$$

Per cui il sistema iniziale é incompatibile se $h(h-1) \neq 0$. Dobbiamo quindi studiare i due casi $h = 0$ e $h = 1$.

Se $h = 0$ il sistema iniziale é equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y &=& 0 \\ 5y - z &=& 3 \end{array}\right.$$

che ammette la seguente retta affine di soluzioni Span$\{(2,1,5)\}+(0,0,-3)$.

Se $h=1$

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ y+2z &= -1 \\ -9z &= 7 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione $\{(\frac{5}{9},\frac{5}{9},-\frac{7}{9})\}$.

Esercizio 2. *Nello spazio euclideo si considerino i seguenti quattro punti in un dato riferimento cartesiano:*

$$P_0=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad P_1=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},\quad Q_0=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\quad Q_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Sia r_1 *la retta passante per* P_0 *e* P_1 *e sia* r_2 *la retta passante per* Q_0 *e* Q_1.

1. *Trovare equazioni cartesiane e parametriche per* r_1 *e per* r_2.
2. *Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2.
3. *Calcolare l'angolo tra* r_1 *ed* r_2.
4. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_0, P_1 *e* Q_1.

Esercizio 3. *Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U := Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

$$W := Span\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\}$$

1. *Calcolare la dimensione e trovare una base di ognuno dei seguenti sottospazi:* U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$.

2. *Trovare equazioni cartesiane per* U *e per* W.

3. *Trovare una base di* $U^{\perp}$ *ed una base di* $W^{\perp}$.

Esercizio 4. *Stabilire per quali valori del parametro reale* h *la matrice*

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ *e per ognuno di essi trovare una base di autovettori.*

Esercizio 5. *Si consideri la forma quadratica in tre variabili*

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 8xz + 4yz.$$

1. *Trovare la matrice* A *tale che* $q(X) = {}^tXAX$.

2. *Trovare lo spettro di* A.

3. *Trovare una matrice ortogonale* B *tale che*

$$q(BX) = (1 + \sqrt{21})x^2 + 2y^2 - (\sqrt{21} - 1)z^2.$$

4. *La forma quadratica* q *é definita positiva? E' definita negativa? E' indefinita? Motivare la risposta.*