# Prova scritta di Geometria 1
# Docente: Giovanni Cerulli Irelli

4 Luglio 2017

**Esercizio 1.** *Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, trovare, se esistono, tutte le soluzioni del seguente sistema lineare nelle variabili reali $x, y, z$:*

$$\begin{cases} 2x + (h+1)y - z &= 3, \\ 3x + (2h-1)y - z &= 3, \\ hx + 2hz &= -h^2, \\ x + (h-2)y &= 0, \\ (1+h)x + (h-2)y + 2hz &= -h. \end{cases}$$

**Esercizio 2.** *Nello spazio euclideo si considerino i seguenti quattro punti in un dato riferimento cartesiano:*

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

*Sia $r_1$ la retta passante per $P_0$ e $P_1$ e sia $r_2$ la retta passante per $Q_0$ e $Q_1$.*

1. *Trovare equazioni cartesiane e parametriche per $r_1$ e per $r_2$.*
2. *Determinare la posizione reciproca di $r_1$ ed $r_2$.*
3. *Calcolare l'angolo tra $r_1$ ed $r_2$.*
4. *Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_0$, $P_1$ e $Q_1$.*

**Esercizio 3.** *Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$

$$U := Span\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

$$W := Span\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \}$$

1. *Calcolare la dimensione e trovare una base di ognuno dei seguenti sottospazi:* $U$, $W$, $U \cap W$ *e* $U + W$.

2. *Trovare equazioni cartesiane per* $U$ *e per* $W$.

3. *Trovare una base di* $U^{\perp}$ *ed una base di* $W^{\perp}$.

**Esercizio 4.** *Stabilire per quali valori del parametro reale* $h$ *la matrice*

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*sia diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *e per ognuno di essi trovare una base di autovettori.*

**Esercizio 5.** *Si consideri la forma quadratica in tre variabili*

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 8xz + 4yz.$$

1. *Trovare la matrice* $A$ *tale che* $q(X) = {}^tXAX$.

2. *Trovare lo spettro di* $A$.

3. *Trovare una matrice ortogonale* $B$ *tale che*

$$q(BX) = (1 + \sqrt{21})x^2 + 2y^2 - (\sqrt{21} - 1)z^2.$$

4. *La forma quadratica* $q$ *é definita positiva? E' definita negativa? E' indefinita? Motivare la risposta.*