Esercizio 1. *Si consideri una matrice* 2×2 *reale e triangolare inferiore*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

1. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *e per tali valori trovare una base che la diagonalizza.*
2. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$ *e per tali valori trovare una base che la diagonalizza.*
3. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *ammetta una base ortonormale di autovettori in* $\mathbb{R}^2$ *e e per tali valori trovare una tale base.*
4. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia invertibile e calcolarne l'inversa.*

Soluzione Esercizio 1. *Il polinomio caratteristico della matrice* A *è dato da* $p_A(\lambda) = (x - \lambda)(z - \lambda)$ *per cui lo spettro di* A *consiste dei due numeri reali* x *e* z*, non necessariamente distinti. In particolare, poichè per ipotesi* x *e* z *sono numeri reali,* A *ha spettro reale. Ne segue che* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *se e solo se è diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$*. Per cui la risposta alla domanda (2) è esattamente la stessa risposta alla domanda (1). Rispondiamo quindi alla domanda (1).*

Se $x \neq z$ *allora la molteplicità algebrica di* x *è uguale ad* 1*, cosi come la molteplicità algebrica di* z*. Ne segue che anche la loro molteplicità geometrica è uguale ad uno, e quindi la matrice* A *è diagonalizzabile in questo caso, per ogni valore di* $y \in \mathbb{R}$*. Per trovare una base diagonalizzante studiamo gli autospazi: utilizzando il fatto che* $x - z \neq 0$ *otteniamo*

$$V_A(x) = Ker(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & z - x \end{pmatrix}) = Span \begin{pmatrix} x - z \\ y \end{pmatrix}.$$

$$V_A(z) = Ker(\begin{pmatrix} x - z & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}) = Span \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui una base diagonalizzante per A *è* $\{\begin{pmatrix} x - z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

Se $x = z$*,* A *ha ammette un unico autovalore che ha quindi molteplicitá algebrica due. Ne segue che* A *è diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *se e solo se la molteplicitá geometrica di tale autovalore é anch'essa uguale a due. Studiamo quindi l'autospazio:*

$$V_A(x) = Ker(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}).$$

L'unica matrice 2×2 ad avere nucleo di dimensione due é la matrice nulla. Ne segue che se $x = z$, la matrice é diagonalizzabile se e solo se $y = 0$ ovvero se e solo se è una matrice diagonale. In questo caso ogni base di $\mathbb{R}^2$ è una base diagonalizzante per A.

La matrice A è invertibile se e solo se $det(A) = xz \neq 0$. In tal caso l'inversa é data da

$$A^{-1} = \frac{1}{xz} \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ -y & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Trovare la dimensione ed una base per l'immagine di A;*

2. *Trovare la dimensione ed una base per il nucleo di A;*

3. *Studiare il seguente sistema lineare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} y - z &= 1 \\ -x + z &= k^2 - 1 \\ x - y &= -2 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 2. *Denotiamo con*

$$A^1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la prima, la seconda e la terza colonna di A, rispettivamente. Notiamo che A^1 ed A^2 sono linearmente indipendenti e che $A^1 + A^2 + A^3 = 0$. Ne segue che l'immagine di A ha come base $\{A^1, A^2\}$ ed il nucleo di A ha come base il vettore $(1, 1, 1)^t$. Il sistema dato ammette una soluzione se e solo se il vettore $b := (1, k^2 - 1, -2)^t$ appartiene all'immagine di A. Osserviamo che l'immagine di A é descritta dalla seguente equazione cartesiana (come si vede subito): $x + y + z = 0$. Per cui $b \in Im(A)$ se e solo se $1 + (k^2 - 1) - 2 = 0$ ovvero se e solo se $k^2 = 2$ ovvero se e solo se $k = \pm\sqrt{2}$. In entrambi i casi il sistema diventa

$$\begin{cases} y - z &= 1 \\ -x + z &= 1 \\ x - y &= -2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione deduciamo $y = z + 1$ e dalla seconda $x = z - 1$. Una soluzione particolare del sistema é quindi $X_0 = (-1, 1, 0)^t$ e lo spazio delle soluzioni è il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ dato da $X_0 + Ker(A)$ ovvero l'insieme

$$\{\begin{pmatrix} -1 + t \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Esercizio 3. *Consideriamo i seguenti tre punti di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per* P *e* Q*; chiamiamola* r_1*.*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per* Q *ed* R*; chiamiamola* r_2*.*

3. *Trovare il coseno dell'angolo tra le rette* r_1 *ed* r_2*.*

4. *Calcolare il perimetro del triangolo di vertici* P*,* Q *ed* R*.*

5. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P*,* Q *ed* R*.*

Soluzione Esercizio 3. *Notiamo che* $Q = -P$*, per cui la retta* r_1 *passa per l'origine ed ha equazione parametrica* tP *(*$t \in \mathbb{R}$*) ed equazioni cartesiane* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$*. La retta* r_2 *ha equazioni parametriche* $Q + t(R - Q)$ *(*$t \in \mathbb{R}$*). Il vettore direttore di* r_2 *è* $R - Q = (2, 2, 1)$ *e la retta direttrice* $s := Span(R - Q)$ *ha equazioni cartesiane* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$*. Per cui la retta* r_2 *ha equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 2z = -3 \end{cases}$$

La lunghezza del perimetro è data dalla somma delle distanze tra i tre vertici:

$$\begin{aligned} dist(P, Q) &= ||P - Q|| = ||2P|| = 2||P|| = 2\sqrt{3}, \\ dist(R, P) &= ||R - P|| = 3, \\ dist(R, Q) &= ||R - Q|| = 3, \end{aligned}$$

per cui la lunghezza del perimetro è pari a $6 + 2\sqrt{3}$*.*

L'area è data da

$$Area = \frac{||(P - Q) \wedge (R - Q)||}{2} = \frac{||2P \wedge (R - Q)||}{2} = ||P \wedge (R - Q)|| = || \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} || = 3\sqrt{2}.$$

Il coseno dell'angolo tra r_1 *ed* r_2 *è per definizione il coseno dell'angolo tra i due vettori direttori* P *e* $R - Q$*. Si ha che tale coseno è dato da*

$$\frac{P \cdot (R - Q)}{||P|| ||R - Q||} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Esercizio 4. *Nello spazio vettoriale* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *delle matrici* 2×2 *a coefficienti reali, si considerino i sottoinsiemi:*

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b-c+d=0 \right\}, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a=d,\, b=c \right\}.$$

1. *Dimostrare che* U *e* W *sono sottospazi vettoriali di* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. *Trovare la dimensione ed una base per* U.
3. *Trovare la dimensione ed una base per* W.
4. *Trovare la dimensione ed una base per i sottospazi* $U+W$ *e* $U\cap W$.

Soluzione Esercizio 4. *Sia* $F : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *la funzione* $F(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = a+b-c+d$. *Si vede subito che* F *è lineare, ed* $U = Ker(F)$ *per costruzione. Ne segue che* U *è un sottospazio vettoriale.*

Sia $G : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ *la funzione* $G(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-d \\ b-c \end{pmatrix}$. *Si vede subito che* G *è lineare, e* $W = Ker(G)$ *per costruzione. Ne segue che* U *è un sottospazio vettoriale.*

Notiamo che F *è suriettiva: infatti* $F(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$. *Ne segue che* $dim\, U = dim\, Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) - dim\, \mathbb{R} = 4-1 = 3$. *Una base per* U *è data da*

$$u_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti u_1, u_2, u_3 *sono ovviamente tre vettori linearmente indipendenti di* U.

Similmente, notiamo che G *è suriettiva: infatti* $G(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $G(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ne segue che* $dim\, W = dim\, Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) - dim\, \mathbb{R}^2 = 4-2 = 2$. *Una base per* W *è data da*

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti w_1 *e* w_2 *sono ovviamente due vettori linearmente indipendenti di* W.

Per trovare $U\cap W$ *e* $U+W$ *conviene identificare* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *con* $\mathbb{R}^4$ *tramite la mappa* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ *ed usare le usuali tecniche in* $\mathbb{R}^4$.

Ovvero riduciamo a scala la matrice che ha come colonne u_1, u_2, u_3, w_1, w_2 *rispettivamente:*

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

ed otteniamo che $U \cap W = \{x_1w_1 + x_2w_2 |\, 2x_1 = 0\} = Span(w_2)$. *Per cui* $dim\, U \cap W = 1$. *Ne segue che* $dim\,(U + W) = 3 + 2 - 1 = 4$ *e quindi* $U + W$ *è l'intero spazio vettoriale* $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5. *Della matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sappiamo che*

1. *la prima riga è $(1, -1, 1)$,*
2. *A è diagonalizzabile,*
3. *la traccia di A è pari a 2,*
4. *i due vettori $(1, 0, 1)^t$ e $(1, 1, 0)$ sono autovettori di A.*

Determinare la matrice A.

Soluzione Esercizio 5. *La prima condizione ci dice che la matrice A ha la forma*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

per qualche $a, b, \cdots, f \in \mathbb{R}$. Dalla condizione (4) otttteniamo le equazioni vettoriali:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a+c \\ d+f \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \\ d+e \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

da cui otteniamo: $\lambda_1 = 2$, $a + c = 0$, $d + f = 2$, $\lambda_2 = 0$, $a + b = 0$, $d + e = 0$. Dalla condizione (3) otteniamo $b + f = 1$. Mettendo insieme tutte queste condizioni, deduciamo che la matrice A ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a & -a \\ 1-a & a-1 & 1+a \end{pmatrix}$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico di A è quindi $p_A(x) = -x^3 + 2x^2 = x^2(2 - x)$ per cui $Sp(A) = \{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0\}$ e λ_2 ha molteplicità algebrica due. La condizione 2 ci dice che A è diagonalizzabile, per cui anche la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 0$ che è la dimensione del nucleo di A deve essere uguale a due. Calcoliamo il nucleo di A con una semplice riduzione a scala:

$$ker(A) = ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che tale nucleo ha dimensione due se e solo se $a = 0$. Per cui A è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$