Esercizio 1. *Si consideri una matrice* 2×2 *reale e triangolare inferiore*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

1. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$ *e per tali valori trovare una base che la diagonalizza.*
2. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$ *e per tali valori trovare una base che la diagonalizza.*
3. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *ammetta una base ortonormale di autovettori in* $\mathbb{R}^2$ *e e per tali valori trovare una tale base.*
4. *Trovare tutti i valori di* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tali per cui la matrice* A *sia invertibile e calcolarne l'inversa.*

Esercizio 2. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Trovare la dimensione ed una base per l'immagine di* A*;*
2. *Trovare la dimensione ed una base per il nucleo di* A*;*
3. *Studiare il seguente sistema lineare, al variare del parametro* $k \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{cases} y - z & = & 1 \\ -x + z & = & k^2 - 1 \\ x - y & = & -2 \end{cases}$$

Esercizio 3. *Consideriamo i seguenti tre punti di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per* P *e* Q*; chiamiamola* r_1*.*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane per la retta passante per* Q *ed* R*; chiamiamola* r_2*.*

3. *Trovare il coseno dell'angolo tra le rette* r_1 *ed* r_2*.*

4. *Calcolare il perimetro del triangolo di vertici* P*,* Q *ed* R*.*

5. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P*,* Q *ed* R*.*

Esercizio 4. *Nello spazio vettoriale* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *delle matrici* 2×2 *a coefficienti reali, si considerino i sottoinsiemi:*

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b - c + d = 0 \right\}, \quad W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = d,\, b = c \right\}.$$

1. *Dimostrare che* U *e* W *sono sottospazi vettoriali di* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
2. *Trovare la dimensione ed una base per* U.
3. *Trovare la dimensione ed una base per* W.
4. *Trovare la dimensione ed una base per i sottospazi* $U + W$ *e* $U \cap W$.

Esercizio 5. *Della matrice* $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *sappiamo che*

1. *la prima riga è* $(1, -1, 1)$,
2. A *è diagonalizzabile,*
3. *la traccia di* A *è pari a 2,*
4. *i due vettori* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sono autovettori di* A.

Determinare la matrice A.