Esame di Geometria 1

20 Ottobre 2017

Esercizio 1. Trovare l'equazione della sfera passante per il punto P=(1,2,1) e che intersechi il piano $\{z = 0\}$ nella circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$, $z = 0$.

Soluzione 1. Il centro della sfera deve giacere sulla retta passante per il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ e perpendicolare al piano $z = 0$. Dato che il centro é $(1, 0, 0)$ tale retta consiste di tutti i punti della forma $(1, 0, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Si trova quindi che il centro della sfera é $(1, 0, \frac{3}{2})$ ed il suo raggio é $\frac{\sqrt{17}}{2}$. La sfera ha quindi equazione

$$(x_1)^2 + y^2 + (z - \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3z - 1 = 0$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale V delle matrici 2×2 reali, si consideri il seguente insieme

$$U := \{X \in V | \, XY = YX \text{ dove } Y := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Dimostrare che U é un sottospazio vettoriale di V, calcolarne la dimensione e trovare una base.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

1. una base del nucleo di f;

2. una base dell'immagine di f;

3. la controimmagine $f^{-1}(v)$ del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la seguente matrice reale

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & k \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ammette una base ortonormale di autovettori e per tali k determinare una tale base.

Esercizio 5. Sia A una matrice 2×2 tale che $A^2 - 5A - 2\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_2$. Dimostrare che A è invertibile esibendo l'inversa. Verificare il risultato nel caso della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.