SCHEDA 1

Esercizio 0.1. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2w = 0 \\ kx + y + (1+k)z + 2w = 0 \\ kz + kw = 0 \\ ky + (1+k)z + (2+k)w = 0 \end{cases}$$

Esercizio 0.2. Si consideri la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare tutti gli autovalori reali e complessi di A.
(2) Giustificare il fatto che lo spettro di A ottenuto al punto (1) è costituito da soli autovalori reali.
(3) Dimostrare che A è diagonalizzabile e determinarne la sua forma diagonale D.
(4) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.
(5) Trovare (se esiste) una matrice ortogonale $N \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $D = N^{-1}AN$.

Esercizio 0.3. Si consideri l'applicazione lineare $T_k \colon \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definita da

$$T_k(p(t)) = p(0) + (2k-1)p(0)t^2 + kp'(0)(t+t^2) + \frac{1}{2}p''(0)(t - kt + kt^2)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$; dove $p(0)$, $p'(0)$ e $p''(0)$ denotano rispettivamente il polinomio $p(t)$ valutato in zero e le sue derivate calcolate in zero.

(1) Determinare la dimensione di $ker(T_k)$ e di $Im(T_k)$ in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Determinare lo spettro (reale) di T_k in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
(3) Per i valori di k per cui gli autovalori di T_k sono tutti reali, determinarne gli autospazi.
(4) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 0.4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^5$

$$v_1 = (1,1,1,0,3)^t, \quad v_2 = (1,1,0,0,2)^t, \quad v_3 = (2,0,0,0,2)^t, \quad v_4 = (1,2,1,0,4)^t$$

Siano inoltre $V, W \subseteq \mathbb{R}^5$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$V = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\} \qquad \text{e} \qquad W = \mathrm{Span}\{v_3, v_4\}.$$

(1) Determinare una base per $V + W$ ed una base per $V \cap W$.
(2) Determinare equazioni parametriche per $V + W$ e per $V \cap W$.
(3) Determinare equazioni cartesiane per $V + W$ e per $V \cap W$.
(4) Determinare la distanza di $P := (1,-1,1,1,-1)^t$ da V.

Esercizio 0.5. Si considerino i seguenti polinomi in $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$: $p_1(t) := 1 + t$, $p_2(t) := 1 + 2t + t^2$, $p_3(t) = t - t^2$.

(1) Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ è una base di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.
(2) Dimostrare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)q(0) + q(1)p(1) + p(-1)q(-1)$$

è un prodotto scalare.
(3) Determinare, a partire dai polinomi della base $\mathcal{B}$, una base $\mathcal{B}'$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.