SCHEDA 2

Esercizio 0.1. Determinare tutte le (eventuali) soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + kz = k \\ x + (k-1)y = 0 \\ x + (k-1)y + kz = k \end{cases}$$

Esercizio 0.2. Si consideri la matrice $A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Determinare tutti gli autovalori reali e complessi di A.
(2) Giustificare il fatto che lo spettro di A ottenuto al punto (1) è costituito da soli autovalori reali.
(3) Dimostrare che A è diagonalizzabile e determinarne la sua forma diagonale D.
(4) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.
(5) Trovare (se esiste) una matrice ortogonale $N \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tale che $D = N^{-1}AN$.

Esercizio 0.3. Si consideri l'applicazione lineare $T_k \colon \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definita da

$$T_k(p(t)) = kp(0) + p'(0)(t + kt^2) + \frac{1}{2}p''(0)(kt + t^2)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$; dove $p(0)$, $p'(0)$ e $p''(0)$ denotano rispettivamente il polinomio $p(t)$ valutato in zero e le sue derivate calcolate in zero.

(1) Determinare la dimensione di $ker(T_k)$ e di $Im(T_k)$ in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
(2) Determinare lo spettro (reale) di T_k in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
(3) Per i valori di k per cui gli autovalori di T_k sono tutti reali, determinarne gli autospazi.
(4) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 0.4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi $U := \mathrm{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$ e $V := \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$

(1) Determinare una base per $U + V$ ed una base per $U \cap V$.
(2) Determinare equazioni parametriche per $U + V$ e per $U \cap V$.
(3) Determinare equazioni cartesiane per $U + V$ e per $U \cap V$.
(4) Determinare la distanza di $P := (1, 1, 1, 1)^t$ da U.

Esercizio 0.5. Si considerino le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 3 + 3s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

(1) Verificare che le rette r ed s non sono parallele.
(2) Stabilire se le due rette si intersecano e, in caso affermativo, calcolare le coordinate del loro punto di intersezione $r \cap s$.
(3) Calcolare la distanza fra le due rette r ed s.