

SCHEDA 3

Esercizio 0.1. Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (k+2)y + w = 1 \\ -x + z = k + 1 \\ (k+1)x + 2y - z = 0 \\ x - 2y - (1+k)z = -2 \end{cases}$$

- (1) Determinare tutte le (eventuali) soluzioni del sistema in funzione del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- (2) Per ognuno dei valori del parametro per cui il sistema ammette soluzione si stabilisca se la somma di due soluzioni è ancora una soluzione.
- (3) Per ognuno dei valori del parametro per cui il sistema ammette soluzione si stabilisca se lo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 0.2. Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali la conica \mathcal{C} di equazione

$$(-5+k)x^2 - 6xy + (-5-k)y^2 + 1 = 0$$

è un'ellisse reale.

Esercizio 0.3. Si consideri l'applicazione lineare $T_k: \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ definita da

$$T_k(p(t)) = (3-t)p(0) + tp'(0) + 4\left(\frac{1}{4}k + 1 - t\right)p'(0) + p''(0)(5-t)$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$; dove $p(0)$, $p'(0)$ denotano rispettivamente il polinomio $p(t)$ e la sua derivata prima valutati in zero.

- (1) Determinare la dimensione di $\ker(T_k)$ e di $\text{Im}(T_k)$ in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
- (2) Determinare lo spettro (reale) di T_k in funzione di $k \in \mathbb{R}$.
- (3) Per i valori di k per cui gli autovalori di T_k sono tutti reali, determinarne gli autospazi.
- (4) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile (su \mathbb{R}).

Esercizio 0.4. Si consideri la seguente applicazione lineare

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z)^t \longmapsto (3x - 2y, x + y + 5z, 2x - y + z)^t$$

Siano inoltre $V, W \subseteq \mathbb{R}^3$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$V = \ker\{F\} \quad \text{e} \quad W = \text{Im}\{F\}$$

dove $\text{Im}\{F\}$ denota l'immagine dell'applicazione F .

- (1) Determinare una base per V ed una base per W .
- (2) Determinare equazioni parametriche per $V + W$ e per $V \cap W$.
- (3) Determinare equazioni cartesiane per $V + W$ e per $V \cap W$.

Esercizio 0.5. Si considerino le seguenti rette in \mathbb{R}^3 :

$$r: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

- (1) Verificare che le rette r ed s non sono parallele.
- (2) Stabilire se le due rette si intersecano e, in caso affermativo, calcolare le coordinate del loro punto di intersezione $r \cap s$.
- (3) Calcolare la distanza fra le due rette r ed s .