Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 3
(10 – 16 Ottobre 2016)

Gli esercizi sono presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Dimostra che se un sistema triangolare superiore ammette due soluzioni distinte allora ne ammette infinite.

Esercizio 2. Studiare i sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_3 = 8. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = 7, \\ 3x_3 = -3. \end{cases}$$

Esercizio 3. Studiare i sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_3 - 2x_4 = -3, \\ 2x_4 = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_2 + 3x_3 - 11x_4 = 4, \\ 2x_3 - 9x_4 = 1, \\ \pi x_4 = \pi. \end{cases}$$

Esercizio 4. Studia i sistemi lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ -2x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ \sqrt{3}x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 = \sqrt{3}, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5. Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze: per ogni $n \geq 1$

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}; \quad \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{3}{2^3} + \cdots + \tfrac{n}{2^n} = 2 - \tfrac{n+2}{2^n}.$$

Esercizio 6. Studia i sistemi lineari

$$\begin{cases} 19x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 3, \\ 18x_1 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_4 = 1, \\ 12x_1 + 18x_2 + 3x_4 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 14x_1 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 13x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 1, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Esercizio 7. Studia i seguenti sistemi lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 = 1, \\ -kx_1 + x_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + kx_2 = k, \\ kx_1 + x_2 = 2k+3; \end{cases} \quad \begin{cases} kx_1 + (k+1)x_2 = 1, \\ (k-1)x_1 + kx_2 = k. \end{cases}$$

Esercizio 8. Studia il sistema lineare al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + z + 3w = 5, \\ x + (k+2)y + (k+1)z + 5w = k+5, \\ 2x + 2(k-1)y + 2z + 7w = 12 - k, \\ 2x + 2z + (2k+5)w = 2k+9. \end{cases}$$

Esercizio 9. Stabilisci se le seguenti matrici sono singolari o meno:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale. Dimostra che $(-1)v + v = 0_V$ e che $(-1)v = -v$ per ogni $v \in V$. Come conseguenza dimostra che se v, v_1, $v_2 \in V$ sono tali che $v_1 + v = 0_V = v_2 + v$ allora $v_1 = v_2$; in altre parole, l'opposto di un vettore é univocamente determinato.

Esercizio 11. Fissiamo un riferimento affine in $\mathcal{A}^3$, in modo da identificare lo spazio euclideo con $\mathbb{R}^3$. Dimostra che $\{0\}$, le rette per l'origine, i piani per l'origine ed $\mathbb{R}^3$ sono tutti e soli i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 12. Si ricordi la struttura di spazio vettoriale sull'insieme $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi. Si consideri il sottoinsieme $\mathbb{R}_n[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a n. Dimostrare che $\mathbb{R}_n[t]$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$.

Esercizio 13. Dimostrare che l'insieme delle matrici diagonali (ovvero sia triangolari superiori che triangolari inferiori) $n \times n$ é un sottospazio vettoriale di $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 14. Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti: $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Esercizio 15. Trovare condizioni su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in maniera che i due vettori non nulli $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ siano linearmente dipendenti.