Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 5
(24 – 30 Ottobre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Per $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita come:

$$T_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + k \\ kx_2 \\ x_3^2 - k \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{R}$, la funzione T_k non è lineare.

Più in generale dimostrare che una funzione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(x_1, x_2, x_3) \\ p_2(x_1, x_2, x_3) \\ p_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

(dove p_1, p_2, p_3 sono polinomi in tre variabili) è lineare se e solo se p_1, p_2, p_3 sono polinomi omogenei di primo grado, ovvero sono della forma $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$.

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita come:

$$T_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + x_2 \\ (k+2)e^{x_2} \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione T_k è lineare.

Esercizio 3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione data da $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$.
Verififcare che T è lineare e trovare il suo nucleo e la sua immagine.

Esercizio 4. Siano $n > m \geq 0$ due interi e si consideri la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data da

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Dimostra che T è lineare e trova una matrice A tale che $T = L_A$.

Esercizio 5. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione data da $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$.

Trovare una matrice A tale che $T = L_A$ e verifica, usando il nucleo di A, che T è iniettiva.

Esercizio 6. Trova i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $Ax = b$ ha soluzioni, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix},$$

e calcola le soluzioni corrispondenti a tali valori.

Esercizio 7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 11 & -9 & 3 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Trova nucleo e immagine di A e studia il sistema $Ax = \lambda x$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8. Di ognuna delle seguenti matrici, trovare nucleo e immagine (descrivendone una base):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,4}(\mathbb{R}); \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3,2}(\mathbb{R}); \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{2,3}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Esercizio 9. La *traccia* TrA di una matrice quadrata $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ è per definizione la somma degli elementi diagonali di A: $Tr\, A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Dimostrare che $Tr : Mat_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare.

Esercizio 10. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $S_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare tale che

$$S_a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad S_a\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verificare che T ed S_a sono ben definite. Trovare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Im}\, S_a$ e calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}\, T \cap \mathrm{Im}\, S_a$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare, $V_1 \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V e $W_1 \subseteq W$ un sottospazio vettoriale di W. Dimostrare che

1. $T^{-1}(W_1) := \{v \in V | \, T(v) \in W_1\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V;
2. $T(V_1) := \{T(v) | \, v \in V_1\} \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale di W.

Esercizio 12. Dimostra che il sistema lineare $Ax = b$ è compatibile se e solo se $b \in \mathrm{Im}\, L_A$, e che la soluzione, se esiste, è unica se e solo se $\mathrm{Ker}\, L_A$ è zero.

Esercizio 13. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali finitamente generati. Dimostra che

1. se $\dim V > \dim W$ l'applicazione T non può essere iniettiva;
2. se $\dim V < \dim W$ l'applicazione T non può essere suriettiva.

Esercizio 14. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare *iniettiva*. Dimostrare che se $v_1, \cdots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti, allora anche i loro trasformati $T(v_1), \cdots, T(v_k) \in W$ sono linearmente indipendenti. Dare un esempio di un'applicazione lineare (necessariamente non iniettiva) per cui questo è falso.

1 Numeri Complessi

Studiare il paragrafo 4.6 del libro di testo (riguardante i numeri complessi), e risolvere gli esercizi da 4.35 a 4.44 del libro di testo. Nel caso si avesse un altro libro di testo, studiare il paragrafo introduttivo sui numeri complessi (definizione, forma trigonometrica, potenze e radici) e svolgere i relativi esercizi.