Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 8
(14– 20 Novembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso “Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare” di M. Abate e C. De Fabritiis, capitolo 8.

Esercizio 1. Per ogni angolo θ scrivere la matrice $R_\theta \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ che rappresenta la rotazione del piano dell' angolo θ (in senso antiorario) attorno all'origine nella base canonica. Dimostrare che R_θ è invertibile, notando che ha determinante uguale a 1, e calcolare l'inversa. Scrivere la matrice R_θ corrispondente agli angoli notevoli 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ e π e per ognuna di queste 6 matrici trovare $R_\theta(P)$ dove P è il vettore $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^T$ e fare un disegno approssimativo del risultato (convincendosi della sua correttezza). Verificare la seguente formula:

$$R_\theta R_\rho = R_{\theta+\rho}$$

per ogni θ e ρ. Dedurre che $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Esercizio 2. Sia r la retta di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana

$$r : x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0.$$

Si consideri la retta r' ottenuta ruotando r di un angolo di $\frac{\pi}{6}$ attorno all'origine (in altre parole $r' = R_{\frac{\pi}{6}}(r)$). Trovare equazioni parametriche e cartesiane di r'. Trovare l'intersezione di r ed r'. Disegnare le due rette e convincersi del risultato ottenuto. Sapresti ottenere $r \cap r'$ senza sapere le equazioni di r'?

Esercizio 3 (Carfagna-Piccolella)**.** Consideriamo i sequenti vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}' := \{v_3, v_4, v_5\}$ sono due basi di $\mathbb{R}^3$.

2. Scrivere la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ e quella dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

3. Determinare le coordinate del vettore $2v_1 - v_2 + 5v_3$ nella base $\mathcal{B}'$.

Esercizio 4 (Carfagna-Piccolella)**.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti e completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Considera i tre vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dimostra che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e trova la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica.

Esercizio 6. Considera i polinomi:

$$p_1(t) = t^2 - 2t, \quad p_2(t) = 1 + 2t, \quad p_3(t) = 2 - t^2,$$

ed i polinomi

$$q_1(t) = -1 + t, \quad q_2(t) = -1 + t - t^2, \quad q_3(t) = 2t + 2t^2.$$

Dimostra che $\mathcal{B} := \{p_1, p_2, p_3\}$ e $\mathcal{B}' := \{q_1, q_2, q_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}_2[t]$ e trova la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e quella da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Esercizio 7. Considera i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ed i vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Dimostra che $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{B}' := \{u_1, u_2, u_3\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$ e trova la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Esercizio 8. Siano $A, B \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Scrivi le matrici associate agli endomorfismi $L_A, L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alle due basi seguenti:

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(la base $\mathcal{B}'$ in arrivo, e la base $\mathcal{B}$ in partenza).

Esercizio 9. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

considera l'automorfismo $T : Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dato da $T(X) = AX$ ("moltiplicazione righe per colonne di matrici"). Trova il rango di T e base e dimensione del nucleo di T.

Esercizio 10. Scopri se le seguenti coppie di matrici sono composte da matrici simili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11. Siano $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$; dimostra che $Tr(AB) = Tr(BA)$ dove $Tr : Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ denota l'applicazione lineare traccia definita a lezione o negli esercizi delle settimane passate. Deduci che $Tr(B^{-1}AB) = Tr(A)$ per ogni matrice invertibile $B \in GL_n(\mathbb{R})$. In particolare, se due matrici A e C sono simili, allora hanno la stessa traccia.