Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 10
(28 Novembre– 4 Dicembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis.

Esercizio 1. Calcola l'area dei parallelogrammi generato rispettivamente dalla coppia di vettori

1. $(2,1)$ e $(-4,5)$;
2. $(3,4)$ e $(-2,-3)$.

Esercizio 2. Calcola l'area dei parallelogrammi aventi tre vertici dati rispettivamente dai seguenti punti:

1. $(1,1)$, $(2,-1)$ e $(4,6)$;
2. $(-3,2)$, $(1,4)$ e $(-2,-7)$;
3. $(2,5)$, $(-1,4)$ e $(1,2)$;
4. $(1,1)$, $(1,0)$ e $(2,3)$.

Esercizio 3. Dimostrare che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, allora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

ha un autovettore in $\mathbb{R}^2$. Per quali θ la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? E su $\mathbb{C}$?

Esercizio 4. Trovare lo spettro della seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Dedurre che A è diagonalizzzabile e trovare una base composta da suoi autovettori e scrivere la matrice che rappresenta A in questa base.

Esercizio 5. Sia $T : V \to V$ tale che esiste $\lambda \in Sp(T)$ tale che $V_\lambda = V$. Com'è fatto T?

Esercizio 6. Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & k^2 - 3 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

Esercizio 7. Sia $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$. Dimostra che A e A^T hanno gli stessi autovalori, ma non necessariamente gli stessi autovettori.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale finito-dimensionale. Siano A e B endomorfismi lineari di V tali che $AB = BA$. Mostrare che se v è un autovettore per A di autovalore λ, allora se $Bv \neq 0_V$, esso è un autovettore per A di autovalore λ.

Esercizio 9. Trovare gli autovalori e una base per gli autospazi della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 10. Trovare gli autovalori ed una base degli autospazi della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11. Dire se la seguente matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e/o su $\mathbf{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12. Sia $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo dato da $T(p)(t) = tp'(t)$, dove p' denota la derivata del polinomio p. Trova autovalori e autospazi per T.

Esercizio 13. Sia $T : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo dato da $T(p)(t) = p'(t) + p''(t^2)$, dove p' e p'' denotano la derivata prima e seconda del polinomio p. Trova autovalori e autospazi per T.