Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 11
(5 – 11 Dicembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso “Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare” di M. Abate e C. De Fabritiis, capitolo 9.

Esercizio 1. Determina per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2k-3 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

Esercizio 2. Determina per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ le matrici

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-2i & k^3 \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ k^2-2i & 2k-2 \end{pmatrix}$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2(k-1)-6i & 2-k+3i \\ -4-12i & 4+6i \end{pmatrix} \quad D_k = \begin{pmatrix} 2k-1-2i & 4+2(2k-k^2-1)i \\ 1+ik & k^2-2k+2i \end{pmatrix}$$

sono diagonalizzabili.

Esercizio 3. Calcolare polinomio caratteristico, autovalori reali e relativi autovettori delle seguenti matrici:

1. $$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

2. $$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

3.
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

4.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

5.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ciascuna di esse stabilire se sono diagonalizzabili (su $\mathbb{R}$) e trovare una base di autovettori.

Esercizio 4. Della matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sappiamo che

1. la prima riga è $(1, -1, 1)$,
2. A è diagonalizzabile,
3. la traccia di A è pari a 2,
4. i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono autovettori di A.

Determinare la matrice A.

Esercizio 5. Trova autovalori ed autospazi degli endomorfismi rappresentati, su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & -24 & -18 \\ 8 & 17 & 12 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e determina se sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Esercizio 6. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ definiamo $T_a : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$ ponendo $T_a(p)(t) := tp'(t-a)$. Convinciti che T_a è un endomorfismo lineare di $\mathbb{R}_3[t]$. Determina per quali $a \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) l'endomorfismo T_a è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Sia $T : V \to V$ un endomorfismo lineare di uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbf{K}$. Sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V tale che $T(U) \subseteq U$. Supponiamo che T sia diagonalizzabile. Dimostra che anche l'endomorfismo $T|_U : U \to U$ restrizione di T a U è diagonalizzabile.

Esercizio 8. Trova quali delle seguenti applicazioni $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sono dei prodotti scalari (ovvero simmetrici, bilineari e definiti positivi): per ogni $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ e $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ in $\mathbb{R}^3$

1. $\langle X, Y \rangle := x_1^2 + x_2^2 + x_3 y_3$;
2. $\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2 + \pi x_3 y_3$;
3. $\langle X, Y \rangle := x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_1 y_3$;
4. $\langle X, Y \rangle := 3x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_3$;
5. $\langle X, Y \rangle := -x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$;
6. $\langle X, Y \rangle := x_1 y_1 - x_2 y_2$;
7. $\langle X, Y \rangle := 400 x_1 y_1 + 3\sqrt{\pi} x_1 y_3 + 3\sqrt{\pi} x_3 y_1 + 227 x_3 y_3$.

Tra essi si determinino le funzioni bilineari e per ognuna di esse si trovi una matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $\langle X, Y \rangle = X^T A Y$ (Suggerimento: $a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$).

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\langle X, Y \rangle := X^T A Y$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$;
2. Siano $v := (2, 1)^T$ e $w = (1, 3)^T$ due vettori di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che v e w sono ortogonali rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito sopra e calcolarne la lunghezza rispetto ad esso.

Esercizio 10. In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, trovare un vettore non–nullo che sia perpendicolare sia con $(1, 2, -3)$ che con $(2, -1, 3)$.

Esercizio 11. In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, trovare un vettore non–nullo che sia perpendicolare sia con $(-1, 3, 2)$ che con $(2, 1, 1)$.

Esercizio 12. Per ognuna delle seguenti coppie X, Y di vettori calcolare la lunghezza di X, la lunghezza di Y, la proiezione ortogonale di X lungo Y e la proiezione ortogonale di Y lungo X (rispetto al prodotto scalare standard):

1. $X = (2, -1)$, $Y = (-1, 1)$;
2. $X = (-1, 3)$, $Y = (0, 4)$;
3. $X = (2, -1, 5)$, $Y = (-1, 1, 1)$;
4. $X = (-1, -2, 3)$, $Y = (-1, 3, -4)$;
5. $X = (\pi, 3, -1)$, $Y = (2\pi, -3, 7)$;
6. $X = (15, -2, 4)$, $Y = (\pi, 3, -1)$.

Esercizio 13. Siano $v_1, \cdots, v_r$ dei vettori non–nulli di $\mathbb{R}^n$ che siano perpendicolari a due a due (ovvero tali che $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$). Siano $c_1, \cdots, c_r$ numeri reali tali per cui

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_r v_r = 0.$$

Dimostrare che allora $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Dedurre che $\{v_1, \cdots, v_r\}$ è un insieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 14. Dimostrare che le seguenti uguaglianze sono vere per ogni X, Y:

1. $||X + Y||^2 + ||X - Y||^2 = 2||X||^2 + 2||Y||^2$;
2. $||X + Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2 + 2\langle X, Y\rangle$;
3. $||X + Y||^2 - ||X - Y||^2 = 4\langle X, Y\rangle$.

Esercizio 15. Siano A, B e C tre vettori non–nulli di $\mathbb{R}^n$. Se $\langle A, B\rangle = \langle A, C\rangle$ mostrare con un esempio che non necessariamente si ha $B = C$.