Esercizi Di Geometria 1

SETTIMANA 12
(12 – 18 Dicembre 2016)

Gli esercizi sono parialmente presi dal libro di testo del corso "Geometria Analitica con elementi di Algebra Lineare" di M. Abate e C. De Fabritiis, capitolo 9.

Esercizio 1. Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio metrico di dimensione finita e sia $T : V \to V$ un endomorfismo *simmetrico* di V (ovvero tale che $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ per ogni $v, w \in V$). Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dimostrare che la matrice che rappresenta T nella base $\mathcal{B}$ è simmetrica.

Esercizio 2. Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $(Av) \cdot w = v \cdot (Aw)$ per ogni $v.w \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare che A è simmetrica (ovvero $A = A^T$).
[*Suggerimento*: $e_i \cdot (Ae_j) = ...?$]

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti matrici A trovare (se esiste) una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizzi e quindi una matrice unitaria $U \in \mathcal{O}(n)$ ed una matrice diagonale D tale che ${}^TUAU = D$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \frac{1}{529}\begin{pmatrix} -110 & -450 & 282 \\ -450 & 227 & 288 \\ 282 & 288 & 941 \end{pmatrix},$$

Esercizio 4. Trovare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) per i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ generati rispettivamente dai seguenti vettori:

1. $(1, 1, -1)^t$ e $(1, 0, 1)^t$;

2. $(2, 1, 1)^t$ e $(1, 3, -1)^t$.

Esercizio 5. Trovare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) per i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ generati rispettivamente dai seguenti vettori:

1. $(1, 2, 1, 0)^t$ e $(1, 2, 3, 1)^t$;

2. $(1, -1, 1, 1)^t$ e $(-1, 0, 2, 1)^t$.

Esercizio 6. Trovare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare canonico) per lo spazio delle soluzioni di ognuno dei seguenti sistemi:

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right. ;$

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \end{array} \right. ;$

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right. ;$

4. $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 7y - \pi z & = & 0 \\ 2x - y + z & = & 0 \end{array} \right. .$

Esercizio 7. Trova una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$(1, -1, 1, -1)^t, \quad (5, 1, 1, 1)^t, \quad (-3, -3, 1, -3)^t$$

e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 8. Dimostrare che lo spettro di una matrice ortogonale è contenuto in $\{1, -1\}$.

Esercizio 9. Sia U un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale (reale) V, $\{u_1, \cdots, u_r\}$ una base di U e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su V. Dimostra che un vettore $v \in V$ è ortogonale a U se e solo se $v \perp u_i$ per ogni $i = 1, \cdots, r$.

Esercizio 10. Siano U, U_1 e U_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale metrico $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ di dimensione finita. Dimostra le seguenti affermazioni:

1. $U_1 \subseteq U_2$ implica $U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$;

2. $(U^\perp)^\perp = U$;

3. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$;

4. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Esercizio 11. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a due, si consideri l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ data da

$$\langle p(t), q(t) \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Dimostrare che tale funzione è un prodotto scalare e trovare la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica $\{1, t, t^2\}$.