Esame di Geometria 1

14 Gennaio 2020

Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Nome:

Cognome:

Matricola:

Ambiente e Territorio	
Civile	
Chimica	

13 settimane	
12 settimane	
11 settimane	

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice complessa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & i & i \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare il determinante di A.*
2. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando il teorema di Cayley-Hamilton.*
3. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando la formula di Cramer.*
4. *(2 punti) Calcolare A^{-1} utilizzando l'algoritmo di inversione.*

Esercizio 2. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione*

$$U : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 4(1, -1, -1, 0)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sottospazio vettoriale Z_k generato dal vettore $z_k = (1, k, -1, -k)^t$. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la proiezione $p_U^{Z_k}$ su U lungo Z_k è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali k trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ formata da autovettori per $p_U^{Z_k}$, specificando i corrispondenti autovalori.*

Esercizio 3. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (1, 2)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando Q di 30° in senso anti-orario attorno al punto $P = (2, 2)^t$.*

2. *(1 punto) Sia $P = (2, 3)^t$. Trovare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente P attraverso la retta $r : 2x + 3y = 1$.*

3. *(1 punto) Trovare la posizione reciproca delle rette $r : 2x + 3y = -1$ e $s : 3x + 2y = 2$.*

4. *(1 punto) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per $P = (1, 1)^t$ e parallela alla retta $r : 2x + 3y = -2$.*

5. *(1 punto) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 4 = 0$ e trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = \frac{1}{4}(9, 3\sqrt{3} - 8)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (3, 2)^t$ e la retta $r : 2x - y = 1$.*

7. *(1 punto) Sia $r : 2x + y = 1$ e $P = (2, 2)^t$. Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle due rette r_1 ed r_2 passanti per P e che formano un angolo di $\pi/4$ con r. Posto $P_1 = r \cap r_1$ e $P_2 = r \cap r_2$ calcolare l'area ed il perimetro del triangolodi vertici P, P_1 e P_2.*

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette*

$$r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} \qquad s : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano:*

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (1, 1, 1)^t$, $P_2 = (1, 2, 1)^t$ e $P_3 = (2, 2, 1)^t$.*

4. *(1 punto) Consideriamo le due rette $r = (3, -1, 2)^t + \langle (1, 1, 0)^t \rangle$ e $s = (0, 5, 2)^t + \langle (1, -2, 1)^t \rangle$. Dimostrare che r ed s sono sghembe e trovare il piano π contenente r e parallelo a s.*

5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (1, 1, 1)^t$, $P_2 = (1, -1, 2)^t$ e $P_3 = (-2, 1, 1)^t$.*

6. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette $r = (1, 1, 1)^t + \langle (1, 2, -1)^t \rangle$ ed $s = (1, 2, 3)^t + \langle (2, -1, 1)^t \rangle$*

7. *(1 punto) Calcolare la distanza tra il punto $P = (1, 2, 3)^t$ ed il piano $\pi : 2x + 3y - z = 2$.*

Esercizio 5. *Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali $x_1, \cdots, x_6$, dipendente dal parametro $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} x_1 + (k-1)x_2 - (k-1)x_4 - (k-1)x_6 = k-3 \\ 3x_1 + 3(k-1)x_2 + x_3 - (k-1)x_4 - (k+1)x_6 = k^2 + k - 7 \\ x_1 + (k-1)x_2 + x_3 + (k-1)x_4 + (k-2)(k-1)x_5 + (4k-6)x_6 = k^2 - 3 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Scrivere la matrice completa del sistema.*
2. *(3 punti) Trovare i valori di k per i quali il sistema è compatibile.*
3. *(3 punti) Per i valori di k per i quali il sistema è compatibile, trovare tutte le soluzioni.*