Esercizio 1. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

1. *(2 punti) Determinare una base ortonormale di U.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice P di proiezione ortogonale su U.*
3. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = (4, -4, 3, -4, 0)^t$ da U.*
4. *(1 punto) Dimostrare che la proiezione ortogonale su U è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$ composta di suoi autovettori.*

Sol.: 1. $U = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$F_1 := v_1$; $F_2 := v_2 - \frac{v_2 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F_3 := v_3 - \frac{v_3 \cdot F_1}{F_1 \cdot F_1} F_1 - \frac{v_3 \cdot F_2}{F_2 \cdot F_2} F_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|F_1\| = \sqrt{2}$; $\|F_2\| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $\|F_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\left\{ E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; E_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; E_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di U.

2. Poniamo $B = (E_1 | E_2 | E_3)$. Allora $P = BB^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $PX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. $\mathrm{dist}(X, U) = \|X - PX\| = 3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{5}$

4. $\mathbb{R}^4 = U \overset{\perp}{\oplus} U^\perp$, $U = V_1(pr_U)$, $U^\perp = V_0(pr_U)$.

$U^\perp$ ha come base $\left\{ E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base ortonormale di $\mathbb{R}^5$ composta di autovettori per pr

è $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$.

Esercizio 2. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{C}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{C}^3$.
2. *(1 punto) Si consideri l'unica funzione lineare* $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *tale che*

   $$f(v_1) = v_2, \quad f(v_2) = v_1, \quad f(v_3) = v_1 + v_2.$$

   Trovare la matrice A *che rappresenta* f *nella base* $\mathcal{B}$.
3. *(3 punti) Trovare la matrice* C *che rappresenta* f *nella base standard.*
4. *(1 punto) Trovare una base del nucleo ed una base dell'immagine di* f.
5. *(1 punto) Stabilire se* f *è diagonalizzabile su* $\mathbb{C}$.

Sol.: 1. $\det(v_1|v_2|v_3) = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^3 \arrow[d, "F_e"'] & = & \mathbb{C}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{C}^3 \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & = & \mathbb{C}^3 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{C}^3 & & \mathbb{C}^3 \arrow[ll, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{C}^3 \arrow[rr, "B"'] & & \mathbb{C}^3
\end{tikzcd}$$

$C = BAB^{-1}$

Per calcolare B^{-1} usiamo ad esempio Cramer: $B^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 3-2i & -1 & -3 \\ -2+i & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1-3i & i & -2+2i \\ i-1 & 1 & 2 \\ -4i & i & -2+3i \end{pmatrix}$

4. $\operatorname{Im} f = \langle v_1, v_2 \rangle$, $\operatorname{Ker} f = \langle v_3 - v_1 - v_2 \rangle$

5. $f(v_1+v_2) = v_1+v_2$, $f(v_1-v_2) = v_2-v_1 = -(v_1-v_2)$, $f(v_3-v_1-v_2) = 0_{\mathbb{C}^3}$.
Quindi $Sp(f) = \{1,-1,0\}$. Dato che gli autovalori sono distinti, f è diagonalizzabile.

Esercizio 3. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Sia $Q = (1, -2)^t$ e $P = (3, -4)^t$. Trovare il punto R ottenuto ruotando Q attorno a P di $30°$ in senso anti-orario.*
2. *(1 punto) Sia $P = (14, -14)^t$. Trovare il punto R ottenuto riflettendo ortogonalmente P attraverso la retta $r : 3x + 2y = 1$.*
3. *(1 punto) Calcolare l'angolo tra le due rette $r_1 : 3x + y + 5 = 0$ e $r_2 : 2x - y + 1 = 0$.*
4. *(2 punti) Trovare un'equazione parametrica della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ e trovare equazioni parametriche e cartesiane della retta tangente t_P a $\mathcal{C}$ nel punto $P = P_{\pi/4} = C + r(\cos(\pi/4), \sin(\pi/4))^t$ (dove C è il centro ed r il raggio di $\mathcal{C}$).*
5. *(2 punti) Calcolare l'area ed il perimetro del triangolo di vertici $P_1 = (2, 4)^t$, $P_2 = (3, 2)^t$, $P_3 = (1, 1)^t$.*

Sol.: 1. $R = P + R_{\frac{\pi}{4}}(Q-P) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{3}-5 \end{pmatrix}$

2. $r = X_0 + r_0$, dove $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $r_0 : 3x+2y=0$ ovvero $r_0 : y = -\frac{3}{2}x$.

$R = X_0 + R_{-\frac{3}{2}}(P - X_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{13}\begin{pmatrix} -5/4 & -3 \\ -3 & 5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \end{pmatrix}$

3. $r_1 : y = -3x-5$; $r_2 : y = 2x+1$. $\mathrm{Tg}\, \widehat{r_1 r_2} = \frac{|-3-2|}{|1-6|} = 1 \Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \frac{\pi}{4}$.

4. $\mathcal{C} : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

$P_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} \\ 4+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$t_{P_{\pi/4}} = P_{\frac{\pi}{4}} + \left\langle \begin{pmatrix} \cos -\pi/4 \\ \sin -\pi/4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4+\sqrt{2} \\ 4+\sqrt{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : x + y = 4 + \sqrt{2}$.

5. Area $\overset{\triangle}{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2}\left|\det(P_2 - P_1 \mid P_3 - P_1)\right| = \frac{5}{2}$

perimetro $= \|P_2 - P_1\| + \|P_3 - P_1\| + \|P_3 - P_2\| = \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{5} = \sqrt{5}(2 + \sqrt{2})$

Esercizio 4. *Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca delle due rette (se si intersecano trovare il punto di intersezione)*

$$r : \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad s : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$$

senza cambiare la loro forma .

2. *(1 punto) Stabilire la posizione reciproca della retta e del piano (se si intersecano trovare il punto di intersezione):*

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases} \quad \pi : 3x - y + 2z = 1$$

senza cambiare la loro forma.

3. *(1 punto) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

4. *(2 punti) Consideriamo le due rette*

$$r_1 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad e \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Dimostrare che r_1 ed r_2 sono sghembe e trovare equazioni cartesiane del piano π contenente r_1 e parallelo a r_2.

5. *(1 punto) Calcolare la distanza tra le due rette r_1 ed r_2 del punto 4.*

6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P_1 = (2, 1, -1)^t$, $P_2 = (1, 2, 2)^t$ e $P_3 = (3, -1, -1)^t$.*

Sol.: 1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ le rette giacciono sullo stesso piano ma non sono parallele perché $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$. Quindi $r \cap s = \{P_0\}$. P_0 : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & -7 & 11 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -38 & 16 \end{array}\right)$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{19} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 14/19 \\ 0 & 1 & 0 & 1/19 \\ 0 & 0 & 1 & -8/19 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12/19 \\ 0 & 1 & 0 & 1/19 \\ 0 & 0 & 1 & -8/19 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \quad r \cap \pi = \left\{ \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$

3. $P_1 + \langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano cercato è: $6x + 3y + z = 14$

4. $r_1: A_{r_1} X = b_1 \quad r_2 = X_0 + \langle v \rangle$

$A_{r_1} v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b_1 - A_{r_1} X_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$rg(A_{r_1} v \mid b - A_{r_1} X_0) = 2 \Rightarrow$ r_1 ed r_2 sono sghembe.

Fascio di piani per r_1: $\pi_{\alpha,\beta}: \alpha(x - 2y - 3) + \beta(y - z + 3) = 0$

$\pi_{\alpha,\beta}$ è parallelo a $r_2 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$. Il piano cercato è

$\pi_{2,1}: 2x - 3y - z = 3.$

5. $dist(r_1, r_2) = dist\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \pi_{2,1} \right) = \frac{|2 - 6 + 1 - 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$

6. $(P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Area $\overset{\triangle}{P_1 P_2 P_3} = \frac{1}{2} \| (P_2 - P_1) \wedge (P_3 - P_1) \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{46}}{2}$

Esercizio 5. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare le molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Sol.: 1. $P_A(x) = \det(x\mathbb{1}_4 - A) = \det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 & -2 \\ 1 & x+1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & x+3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & x-3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 & 0 \\ 1 & x+1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & x+3 & x \\ 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1+x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 1 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^2 \det\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 1+x \end{pmatrix}$

$= x^2(x^2+x-2) = x^2(x-1)(x+2)$.

2. $Sp(A) = \{0, 1, -2\}$. $ma_A(0) = 2$; $ma_A(1) = 1$; $ma_A(-2) = 1$.

3. $V_0(A) = \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow mg_A(0) = 2 = ma_A(0)$.

$mg_A(1) = mg_A(-2) = 1$.

4. $V_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$; $V_{-2}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.