Prova scritta di Geometria 1
Esame in modalità telematica
Durata prova: 2 ore
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

16 Giugno 2020

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti punti del piano reale:* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Sia* r *la retta passante per i punti* P *e* Q. *Sia* $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. *(1 punto) Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta* r.
2. *(1 punto) Calcolare la pendenza (o coefficiente angolare) della retta* r.
3. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* C *ed* r.
4. *(1 punto) Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro* C *e tale che la retta* r *sia ad essa tangente.*
5. *(1 punto) Trovare il punto* D *ottenuto riflettendo* C *attraverso* r.
6. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, Q *e* C.
7. *(1 punto) Fare un disegno che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *(1 punto) Trovare le equazioni parametriche di r.*
2. *(1 punto) Trovare le equazioni cartesiane di s.*
3. *(2 punti) Stabilire la posizione reciproca di r ed s.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza tra r ed s.*
5. *(1 punto) Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Esercizio 3. *Fissiamo un numero reale q e consideriamo la matrice* $A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -q^2 \\ 0 & 1 & -2q \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di A_q.*
2. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di A_q.*
3. *(2 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A_q.*
4. *(1 punto) Calcolare lo spettro di A_q.*
5. *(2 punti) Stabilire se esiste un numero reale q per il quale A_q è diagonalizzabile.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(3 punti) Trovare la matrice che rappresenta la funzione "moltiplicazione a sinistra per* A*" che a lezione abbiamo denotato con* $S_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, nella base* $\mathcal{B}$ *(si ricorda che* S_A *è definita come* $S_A(X) = AX$*). Chiamare tale matrice* C.
3. *(3 punti) Stabilire se* A *è invertibile, e nel caso lo sia calcolare la sua inversa.*

Esercizio 5. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Dimostrare che* A *è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^t AB = D$.