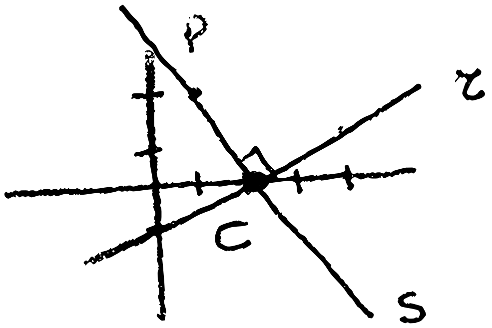
# Prova scritta di Geometria 1
# Esame in modalità telematica
# Durata prova: 2 ore
# Docente: Giovanni Cerulli Irelli

14 Settembre 2020

**Esercizio 1.** *Sia $r$ la retta di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $r : x - 2y = 2$ e si consideri il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

1. *Calcolare la pendenza della retta $r$.*
2. *Calcolare equazioni parametriche e cartesiane della retta $s$ ortogonale ad $r$ e passante per il punto $P$.*
3. *Calcolare la proiezione ortogonale del punto $P$ sulla retta $r$ e denotarlo $C$.*
4. *Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza $\mathcal{C}$ cha ha centro in $C$ e che contiene $P$.*

*Fare i disegni che illustrino la situazione.*




Sol.: 1. $r: y = \frac{1}{2}x - 2$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

2. $s: 2x + y = 4$ ;

$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

3. $C = r \cap s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. Il raggio di $\mathcal{C}$ è $r = \text{dist}(P, C) = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$.

$\mathcal{C}: (x-2)^2 + y^2 = 5$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}$.

**Esercizio 2.** *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri il sottospazio affine $S_k$ composto dalle soluzioni del sistema lineare:*

$$S_k : \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}.$$

1. *Stabilire la posizione reciproca di $S_k$ con la retta $r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.*

2. *Calcolare l'area del triangolo di vertici $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

Sol.: 1. Poniamo $A_K = \begin{pmatrix} 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cosicché $S_K : A_K X = b$.

Poniamo $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cosicché $r = X_0 + \langle v \rangle$.

$S_K$ è parallelo a $r$ se e solo se $A_K v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2 + K = 0$

$\iff K = -2$. Per questo valore di $K$,

$$b - A_K X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero, quindi $S_{-2}$ ed $r_2$ sono parallele e non si intersecano.

Se $K \neq -2$,

$$\det \left( A_K v \mid b - A_K X_0 \right) = \det \begin{pmatrix} K+2 & K-1 \\ K+2 & 2-2K \end{pmatrix} = (K+2)(K-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= -3(K+2)(K-1).$$

Se $K = 1$, $S_1$ ed $r$ si intersecano in un punto.

Se $K \neq 1$ e $K \neq -2$, $S_K$ ed $r$ non sono paralleli e non si intersecano e quindi sono due rette sghembe.

2. $\frac{1}{2} \| (Q-P) \wedge (R-P) \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

**Esercizio 3.** *Siano* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *due vettori di* $\mathbb{R}^4$ *ed* $U = \langle v_1, v_2 \rangle$.

*Calcolare la distanza del punto* $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *da* $U$.

Sol.: Notiamo che $v_1$ e $v_2$ sono ortogonali.

Quindi la proiezione ortogonale di $R$ su $U$ è

$$pr_U(R) = \frac{R \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{R \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$= 0_{\mathbb{R}^4} + \frac{4}{3} v_2 = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La distanza è

$$dist(R, U) = \| R - pr_U(R) \| = \left\| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{1+4+1+9} = \frac{\sqrt{15}}{3} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

**Esercizio 4.** *Studiare il seguente sistema lineare in tre variabili al variare di $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 8y + 12z = -4 \\ 6x + 2y + (k^2-6)z = k+1 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & -4 \\ 6 & 2 & K^2-6 & K+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & K^2-15 & K+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & K^2-9 & K-3 \end{array}\right)$$

Se $K=3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

il sistema ha $\infty^1$ soluzioni che sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se $K=-3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$ Il sistema non ha soluzioni

Se $K \neq 3$ e $K \neq -3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(K+3) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(K+3) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -(2K+9)/2(K+3) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(K+3) \end{array}\right)$$

Il sisteme ha l'unica soluzione

$$\frac{1}{K+3} \begin{pmatrix} K+3 \\ \frac{-2K-9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2K+9}{2(K+3)} \\ \frac{1}{K+3} \end{pmatrix}$$

**Esercizio 5.** *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} 14 & -21 & -4 & 21 \\ -6 & 9 & 2 & -9 \\ 12 & -18 & -2 & 18 \\ -12 & 18 & 4 & -18 \end{pmatrix}$.

1. *Trovare una base per il nucleo di $A$ ed una base per l'immagine di $A$.*
2. *Stabilire se i vettori* $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sono autovettori per $A$.*
3. *Stabilire se $A$ è digonalizzabile su $\mathbb{R}$.*

Sol.:

$$\begin{pmatrix} 14 & -21 & -4 & 21 \\ -6 & 9 & 2 & -9 \\ 12 & -18 & -2 & 18 \\ -12 & 18 & 4 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ -6 & 9 & 2 & -9 \\ 12 & -18 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rref}(A)$$

$$\mathrm{Ker}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle ; \quad \mathrm{Im}\, A = \langle A^1, A^3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2) $Av_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1 \Rightarrow v_1$ è un autovettore di autovalore 1.

$Av_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_2 \Rightarrow v_2$ è un autovettore di autovalore 2.

3) $A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: una base di $\mathbb{R}^4$ composta di autovettori per $A$ è

$$\left\{ v_1, v_2, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$