Prova scritta di Geometria 1
Appello straordinario riservato a fuori-corso, part-time, studenti con disabilità e DSA
Durata prova: 90 minuti
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

24 Aprile 2020

Esercizio 1. *Consideriamo i seguenti punti del piano reale:* $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. *Scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana della retta passante per* P *e di pendenza* $m = 1/2$. *Denominare tale retta* r.

2. *Calcolare la distanza tra* C *ed* r.

3. *Scrivere l'equazione della circonferenza che ha centro* C *e tale che la retta* r *sia ad essa tangente.*

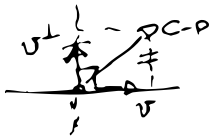
4. *Trovare il punto* D *ottenuto riflettendo* C *attraverso* r.

5. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* P, C, D.

6. *Fare un disegno che illustri la situazione.*

Sol.: 1) $r = P + \langle \underset{\underset{v}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}} \rangle = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \; y = \frac{1}{2}x - 2$

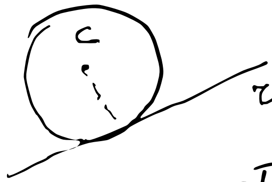
2) $\mathrm{dist}(C, r) = \mathrm{dist}(C-P, \langle v \rangle)$:



$= \| pr_{v^\perp}(C-P) \| =$

$$= \left\| \frac{(C-P)\cdot v^\perp}{v^\perp \cdot v^\perp} v^\perp \right\| = \frac{|(C-P)\cdot v^\perp|}{\|v^\perp\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

3)

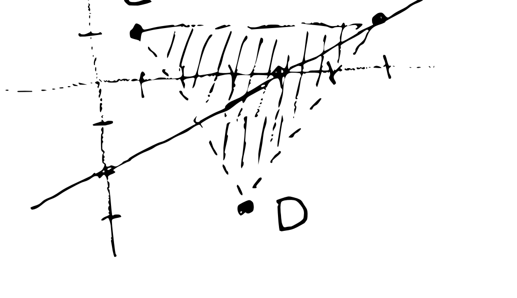


Il raggio è $\mathrm{dist}(C, r) = \sqrt{5}$. Quindi la circonferenza cercata ha equazione cartesiana $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$ ed eq. parametrica $\left\{ C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$.

4) $D = P + Q_{\frac{1}{2}}(C-P) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

5) Area $= \frac{1}{2} |\det(P-C | D-C)| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right| = 10$

6)



Esercizio 2. *Consideriamo le seguenti due rette dello spazio:*

$$r : \begin{cases} x+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

1. *Trovare le equazioni parametriche di r.*
2. *Trovare le equazioni cartesiane di s.*
3. *Stabilire la posizione reciproca di r ed s.*
4. *Calcolare la distanza tra r ed s.*
5. *Calcolare l' area del triangolo di vertici* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: 1) $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$

2) $s : \begin{cases} y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases}$

3) $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ le rette giacciono sullo stesso piano $y = 1$. Non sono parallele perché $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

$\Rightarrow$ Si intersecano in un punto P_0. Cerchiamo P_0:

$s = \left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 2+t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. $\begin{cases} 1+t+2+t = 2 \\ 1+t+1+2+t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$r \cap s = \left\{ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}$

4) $\mathrm{dist}(r, s) = 0$

5) $\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$

Esercizio 3. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Stabilire se* A *è diagonalizzabile sui reali e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile* B *ed una matrice diagonale* D *tali che* $B^{-1}AB = D$.

Sol.: $P_A(x) = x^2 - 3x - 4$.

$$\frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$Sp(A) = \{4, -1\}$.

$V_4(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V_{-1}(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. *Studiare il seguente sistema lineare nelle quattro incognite reali x_1, x_2, x_3, x_4:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

Sol.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 7 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 19 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19/17 \end{array}\right).$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{pmatrix} 6/17 \\ 0 \\ -4/17 \\ 19/17 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 5. *Si consideri la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Dimostrare che A è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una matrice ortogonale B ed una matrice diagonale D tali che* $B^t AB = D$.

Sol.:

$$P_A(x) = x^3 - \operatorname{Tr} A \, x^2 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr}(A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right)x - \det A$$

$$\operatorname{Tr} A = -3, \quad \operatorname{Tr}(A)^2 = 9, \quad \operatorname{Tr}(A^2) = 9, \quad \det A = 0$$

$$\Rightarrow P_A(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3).$$

$$Sp(A) = \{0, -3\}.$$

$$V_{-3}(A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_0(A) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \|v_2'\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{2} \quad \|v_2'\| = \frac{1}{2}\sqrt{6} \quad \|v_3\| = \sqrt{3}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$