Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedí 08 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Siano* $u, v, w \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$. *Dire, motivando la risposta, se* $\langle w\rangle \subset \langle u, u+v\rangle$ *o se* $\langle w\rangle = \langle u, u+v\rangle$, *nei seguenti casi:*

1. $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $u = -v$, $w = 2(u+v)$.

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $n \in \mathbb{N}$ e siano $u, v \in \mathbb{K}^n$. Calcolare $U \cap V$, motivando la risposta, nei seguenti casi:*

1. $U = \langle u, u+v \rangle$ *e* $V = \langle 2u+v \rangle$;
2. $U = \langle u+v, u-v \rangle$ *e* $V = \langle u, v \rangle$;
3. $U = \langle u+v \rangle$ *e* $V = \langle u+2v \rangle$.

Esercizio 3. *1. Enunciare e dimostrare il lemma di scambio.*

2. Utilizzare (ripetutamente) il lemma di scambio e l'esistenza di generatori standard per dimostrare le seguenti uguaglianze di spazi vettoriali:

a) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 2, 1 - x + x^2, 3x + x^2 \rangle$;

b) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \langle 1 - x, 1 + x, x^2 \rangle$;

c) $\mathbb{R}^{1\times 2} = \langle (1, 1), (2, -1) \rangle$.

3. Dimostrare le uguaglianze del punto precedente direttamente.

Esercizio 4. *Determinare se l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmwente indipendente oppure linearemente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, 2)$, $v_3 = (-1, 1) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$;
2. $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$;
3. $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^{1\times 4}$;
4. $v_1 = 1 + x$, $v_2 = 1 + x - x^2$, $v_3 = 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$;
5. $v_1 = \sin(x)$, $v_2 = \sin(2x)$, $v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Esercizio 5. *1. Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di $\mathbb{R}^2$.

2. Esprimere i seguenti vettori come combinazione lineare di ognuna delle basi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ *e* $\mathcal{B}_3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$