Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 3
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 15 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *Trovare una base di* U*.*
3. *Trovare una base di* $U \cap W$*.*
4. *Trovare una base di* $U + W$*.*

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \right\}, \quad W = \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

1. *Dimostrare che* U *è un sottospazio affine di* $\mathbb{R}^3$ *esibendo un sottospazio vettoriale* U_0 *ed un vettore* v *tale che* $U = v + U_0$*.*
2. *Calcolare la dimensione di* U*.*
3. *Determinare se* U *sia un punto, una retta, un piano o tutto lo spazio.*
4. *Determinare* $U \cap W$*.*

Esercizio 3. *Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ un insieme linearmente indipendente di vettori di V. Sia $U = \langle \mathcal{B} \rangle$. Consideriamo i seguenti vettori di U:*

$$z_1 = 2v_1 - v_3, \quad z_2 = 2v_2 + v_3.$$

1. *Dimostrare che $\{z_1, z_2\}$ è linearmente indipendente.*
2. *Trovare due indici distinti i_1 e i_2 tali che $U = \langle \mathcal{B} \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \cup \{z_1, z_2\} \rangle$.*
3. *Trovare un indice i tale che $\{z_1, z_2, v_i\}$ è linearmente indipendente.*

Esercizio 4. *Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi $\mathcal{B}$ dell'opportuno spazio vettoriale, stabilre se forma una base e nel caso la formi, calcolare $F_{\mathcal{B}}(v)$ ed $F_{\mathcal{B}}^{-1}(X)$. (Si ricordi che $F_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è la funzione "coordinate" nella base $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Abbiamo dimostrato che tale funzione è iniettiva e suriettiva, quindi invertibile. L'inversa $F_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$ associa ad $X = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ il vettore $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$.)*

1. $\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$, $v = 2$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. *Sia* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *uno spazio vettoriale di dimensione* 3 *generato da tre vettori* v_1, v_2, v_3. *Si considerino:*
   $\mathcal{B} = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3\} \subset V$, $v = v_1$, $X = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. *Sia* $L : V \to W$ *un'applicazione lineare.*

1. *Cosa vuol dire che* L *è lineare? (Dare la definizione.)*
2. *Dimostrare che se* L *è iniettiva e* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ *è linearmente indipendente, allora anche* $L(\mathcal{B}) = \{L(v_1), L(v_2), L(v_3)\} \subset W$ *è linearmente indipendente. Generalizzare ad un insieme linearmente indipendente* $\mathcal{B}$ *con un numero* k *arbitrario di elementi.*
3. *Dimostrare che se* $U \subseteq V$ *è un sottospazio vettoriale, allora* $L(U) = \{L(u) | \, u \in U\} \subseteq W$ *è un sottospazio vettoriale.*
4. *Dimostrare che se* $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *è una base di* V *ed* L *è lineare, iniettiva e suriettiva, allora* $L(\mathcal{B})$ *è una base di* W.