Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 4
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 22 Ottobre 2019

Esercizio 1. *Sia* $V = Mat_{2\times 2}(\mathbf{K})$ *lo spazio vettoriale delle matrici quadrate* 2×2 *a coefficienti in un campo* $\mathbf{K}$. *Per ogni* $1 \leq i, j \leq 2$ *definiamo la matrice* $E_{ij} \in V$ *come* $(E_{ij})_{k\ell} = 1$ *se* $k = i$ *e* $\ell = j$ *e* $(E_{ij})_{k\ell} = 0$ *altrimenti, ovvero*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ *è una base di* V.

2. *Calcolare la dimensione di* V.

3. *Scrivere ogni matrice* E_{ij} *come la somma di una matrice simmetrica e di una matrice anti-simmetrica.*

4. *Dimostrare che, per ogni* $n \geq 2$, *i due sottoinsiemi* $Sym(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbf{K}) | A^t = A\}$ *e* $ASym(n) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbf{K}) | A^t = -A\}$ *sono sottospazi vettoriali di* $Mat_{n\times n}(\mathbf{K})$.

5. *Dimostrare che* $\dim Sym(2) = 3$ *e* $\dim ASym(2) = 1$ *esibendo una base.*

Si vedano le soluzioni di Settimana 4 a ingegneria civile.

Esercizio 2. *Semplificare la seguente espressione matriciale:*

$$-(A^tA+BB^t)^t+B(B-A)^t+(B+A^t)^2-(B-A)^2-B(A^t+A)-(A+A^t)^tB+(A+A^t)(A-A^t)$$

Sol.: Usiamo le proprietà del prodotto righe per colonne e della trasposizione e otteniamo:

$$-\cancel{A^tA}-\cancel{BB^t}+\cancel{BB^t}-\cancel{BA^t}+\cancel{B^2}+\cancel{BA^t}+\cancel{A^tB}+\cancel{(A^t)^2}+$$

$$-(\cancel{B^2}-\cancel{BA}-\cancel{AB}+\cancel{A^2})-BA^t-\cancel{BA}-\cancel{A^tB}-\cancel{AB}+\cancel{A^2}-AA^t+\cancel{A^tA}-\cancel{(A^t)^2}$$

$$=-BA^t-AA^t=-(B+A)A^t.$$

Esercizio 3. • *In ognuno dei seguenti casi, calcolare $(AB)C$ e $A(BC)$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Verificare il risultato con MATLAB.

- *Uno studente di ingegneria ottiene un punteggio di 19/30 all'esame di Analisi 1 (9 crediti) ed un punteggio di 27/30 all'esame di Disegno (6 crediti). Qual'è il punteggio minimo che deve ottenere all'esame di Geometria (9 crediti) affinchè la media pesata dai crediti dei suoi voti in questi tre esami sia almeno 25/30?*

Sol.:

1. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

   $BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

   $BC = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

3. $AB = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $(AB)C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 37 \\ 11 & -18 \end{pmatrix}$

   $BC = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \\ 1 & 27 \end{pmatrix}$, $A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \\ 1 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 37 \\ 11 & -18 \end{pmatrix}$

•) $(9, 9, 6)\begin{pmatrix} 19 \\ x \\ 27 \end{pmatrix} = 9 \cdot 19 + 9 \cdot x + 6 \cdot 27 = 9x + 333$

$$\frac{1}{24}(9x + 333) \geq 25 \Rightarrow \frac{9}{24}x \geq 25 - \frac{333}{24} = \frac{267}{24}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{267}{9} \geq 29.6 \Rightarrow x = 30.$$

Esercizio 4. *1. Trovare una matrice* reale *A di taglia 2×2 tale che $A^2 = -\mathbf{1}_2$.*

2. Si considerino le matrici $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ed* $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Data una matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *calcolare* AE_{11}, $E_{11}A$, AE_{12}, $E_{12}A$. *Verificare il risultato con MATLAB.*

3. Sia A una matrice di taglia 2×2 tale che $AB = BA$ per ogni B. Dimostrare che allora A è una matrice scalare *ovvero esiste uno scalare x tale che $A = x\mathbf{1}_2$.*

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Dimostrare la seguente uguaglianza di matrici:*

$$A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

<u>Sol.</u>:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, oppure, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $AE_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $E_{11}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $E_{12}A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ t.c. $AB = BA$ $\forall B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Allora $AE_{11} = E_{11}A \underset{2.}{\Longleftrightarrow} b = 0 = c.$ $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\mathbf{1}_2$.

$AE_{12} = E_{12}A \underset{2.}{\Longleftrightarrow} a = d, c = 0$

4. $A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 5. *Sia $L : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'unica applicazione lineare tale che*

$$L(1) = 2 - x + 2x^2, \quad L(x) = -2 + x - x^2, \quad L(x^2) = x^2.$$

1. *Determinare $L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$.*
2. *Trovare una base di $Ker(L)$.*

Si vedano le soluzioni della settimana 4 di civile.