Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 7
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 12 Novembre 2019

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice complessa:*

$$A = \begin{pmatrix} i & -1+i & 2i & 3i \\ -1+i & -2 & -4+4i & 0 \\ 1+i & 2i & 2+2i & 6+6i \end{pmatrix}$$

1. *Calolcare il rango-riga di A.*
2. *Trovare una base di Row(A).*
3. *Trovare una base di Im(A).*
4. *Trovare una base di Ker(A) ed estenderla ad una base di $\mathbb{C}^4$ con il teorema di decomposizione complesso.*

Sol.: Per i punti 1, 2, 3 si vedano le soluzioni del foglio di esercizi Settimana 7 di ingegneria civile, ambiente e Territorio.

4. $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & 3 \\ -1+i & -2 & -4+4i & 0 \\ 1+i & 2i & 2+2i & 6+6i \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2+2i & 3-3i \\ 0 & 0 & 0 & 3+3i \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{rg} \bar{A}^t = \operatorname{rg} A^t = 3 \Rightarrow$ $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} -i & -1-i & 1-i \\ -1-i & -2 & -2i \\ -2i & -4-4i & 2-2i \\ -3i & 0 & 6-6i \end{pmatrix}$

La base cercata è $\left\{ \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ -1-i \\ -2i \\ -3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1-i \\ -2 \\ -4-4i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ -2i \\ 2-2i \\ 6-6i \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 2. *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & -4 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Usiamo le proprietà: $\det(P_{12}A) = -\det$

$\det(P_{12}A) = -\det(A)$, $\det(D_i(\lambda)A) = \lambda \det A$, $\det(F_{ij}(c)A) = \det A$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & -4 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -15 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -25 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Esercizio 3. *Calcolare l'inversa della seguente matrice complessa*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1 & -i & -i \\ -i & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.: Si veda la soluzione dell'esercizio 3 del foglio Settimana 7 ad ingegneria civile.

Esercizio 4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Determinare per quali* $b \in \mathbb{R}^3$ *il sistema* $AX = b$ *è risolubile e per tali* b *calcolare tutte le soluzioni del sistema.*

2. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane di Col(A).*

Sol:

1. Vedere le soluzioni dell'esercizio 4 della settimana 7 ed ingegneria civile.

2. $Col(A) = \mathbb{R}^3$, quindi le equazioni cartesiane sono $\mathbb{R}^3 = Ker(0)$ e le equazioni parametriche sono $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$.

Esercizio 5. *Trovare equazioni cartesiane e parametriche dei seguenti sottospazi (affini o vetttoriali) e calcolarne la dimensione.*

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2.$

2. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$

<u>Sol.</u>:

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$: EQ. PAR.

$x - y = -1$: EQ. cartesiane. dim = 1.

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono lin. Ind. . Quindi

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$: EQ. PAR. dim = 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-x+2y-2x \end{array}\right)$$

$-3x + 2y + z = 0$: EQ. CART.

3. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right) :$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$: EQ. PAR., dim = 2

$z - x = 2$: EQ. CARTESIANE.

Esercizio 6. *Studiare il seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + (3k-3)x_2 - x_3 + (k^2-2k-1)x_4 &= k^2-4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + (k+5)x_4 &= k+1 \\ (k-2)x_1 + (3k-6)x_2 - x_3 + (k^2-2k-3)x_4 &= k^2-5 \end{cases}$$

Sol.: Si veda la soluzione dell'esercizio 6 della Settimana 7 ed ingegneria civile.