Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 11
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 10 Dicembre 2019

Esercizio 1. *Sia r la retta per l'origine con vettore direttore $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.*

1. *Dimostrare che la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su r nella base canonica è $P_{a,b} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.*
2. *Dimostrare che $P^2 = P$.*
3. *Sia $P \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $P^2 = P$, $P^t = P$ e $rg(P) = 1$. Dimostrare che P è la matrice di proiezione ortogonale sulla retta $Im(P)$.*

Sol.:

1. $$pr_v(e_1) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 \\ ab \end{pmatrix} = P^1_{a,b}$$

$$pr_v(e_2) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} ab \\ b^2 \end{pmatrix} = P^2_{a,b}$$

2. $$P^2 = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2) & ab(a^2+b^2) \\ ab(a^2+b^2) & b^2(a^2+b^2) \end{pmatrix} = P_{a,b}$$

3. Sia $v \neq 0$ un generatore di $Im P$. Allora $\exists v'$ t.c. $v = Pv' \Rightarrow Pv = P^2v' = Pv' = v$.

Sia w un generatore di $Ker P$. Allora:

$v \cdot w = Pv \cdot w = v^t P^t w = v^t P w = v \cdot Pw = 0 \Rightarrow v \perp w$.

$\Rightarrow (Im P)^\perp = Ker P$ e $\mathbb{R}^2 = Im P \overset{\perp}{\oplus} Ker P$.

Quindi, $\forall u \in \mathbb{R}^2$ $\exists! \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$.

Allora $pr_v(u) = \lambda_1 v = Pu$.

Esercizio 2. *Di ognuna delle seguenti applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trovare la matrice che la rappresenta nella base canonica (sia in partenza che in arrivo):*

1. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
2. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
3. $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
4. *L è la proiezione ortogonale sulla retta che ha vettore direttore* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. *Dato $m \in \mathbb{R}$, L fissa la retta $r : y = mx$ puntualmente (ovvero $L(P) = P$ per ogni $P \in r$) e manda i punti della retta $s : y = (m+1)x$ in zero.*

Sol.:

1,2,3: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

La matrice cercata è

$$C = AB^{-1}$$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $C = \mathbb{1}_2$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Per l'esercizio 1, la matrice cercata è $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

5. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ m+1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & m+1 \end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} m+1 & -1 \\ -m & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "B"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

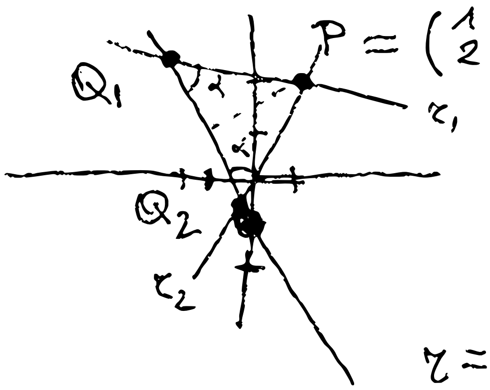
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice cercata è

$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & -1 \\ m^2+m & -m \end{pmatrix}$

Esercizio 3. *Si consideri la retta affine r di $\mathbb{R}^2$ di equazione cartesiana $r : y = -2x - 1$ e sia $P = (1, 2)^t$.*

1. *(1/2 punto) Trovare equazioni parametriche di r.*
2. *(1/2 punto) Calcolare la distanza di P da r.*
3. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette r_1 ed r_2 passanti per P e che formano un angolo di $\pi/4$ con r.*
4. *(1 punto) Calcolare i punti di intersezione $Q_1 = r \cap r_1$ e $Q_2 = r \cap r_2$.*
5. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici Q_1, Q_2 e P.*
6. *(1/2 punto) Trovare il punto P_1 ottenuto ruotando P di $\pi/4$ attorno a Q_1 in senso opposto a Q_2.*
7. *(1/2 punto) Trovare il punto P_2 ottenuto ruotando P di $\pi/4$ attorno a Q_2 in senso opposto a Q_1.*
8. *(1 punto) Calcolare l'area del quadrilatero di vertici P_1, P_2, Q_1 e Q_2.*

Sol.:



$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$r = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{X_0} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v} \rangle : 2x + y = -1$$

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2+2+1|}{5} = 1 .$$

$$3.\ r : y = mx \qquad r_0 : y = -2x \qquad \text{tg}\, \widehat{r r_0} = \frac{|m+2|}{|1-2m|} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad m + 2 = \pm(1 - 2m) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m + 2 = 1 - 2m \Longleftrightarrow 3m = -1 \\ m + 2 = -1 + 2m \Longleftrightarrow m = 3 \end{cases}$$

$$r_1 : y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, \quad r_2 : y = 3x - 1$$

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$r_1 : \ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad , \ r_2 : y = 3x - 1, \quad r : y = -2x - 1$

$$Q_1 = r_1 \cap r : \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}x = -\frac{10}{3} \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = +4 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$Q_2 = r_2 \cap r : \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 1 = \cancel{3}x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 0 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

5. Area Triangolo $= \frac{1}{2} \left| \det(Q_1 - P, Q_2 - P) \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right| = 5$

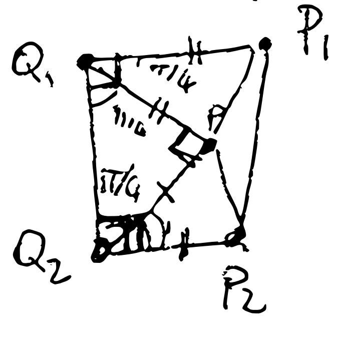
6. $P_1 = Q_1 + R_{\frac{\pi}{4}}(P - Q_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. $P_2 = Q_2 + R_{-\frac{\pi}{4}}(P - Q_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Area $P_1 P_2 Q_1 Q_2 = \text{Area}(\widehat{P_1 Q_1 Q_2}) + \text{Area}(\widehat{Q_2 P_2 P_1}) =$



$$= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{Q_1 P_1}\| \|\overrightarrow{Q_1 Q_2}\| + \frac{1}{2} \left| \det(Q_2 - P_2, P_1 - P_2) \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2}\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} 10\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Esercizio 4. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$*:*

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e che* $\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *(1 punto) Si consideri l'applicazione lineare* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *data da*

   $$T(v_1) = w_1 - w_2, \quad T(v_2) = w_1 + w_2 - w_3, \quad T(v_3) = w_3 - 2w_1.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$*.*
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nelle basi standard.*
4. *(1 punto) Determinare una base del nucleo di* T*.*
5. *(1 punto) Determinare una base dell'immagine di* T*.*

Sol.: 1. Poniamo $B_1 = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_2 = (w_1|w_2|w_3|w_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det B_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, $\det B_2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ sono basi di $\mathbb{R}^3$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^4 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_2}"] & \mathbb{R}^4 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "B_1"] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "B_2"'] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

$C = B_2 A B_1^{-1}$

$-2 + \frac{4}{3}$

$$C = B_2 A B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$= \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$;

5. $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Im}\,C$. Dal conto del punto 4 ricaviamo che

$$\{C^1, C^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathrm{Im}\,C$.

Esercizio 5. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per* r_1 *ed una forma cartesiana per* r_2*.*
2. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2 *e calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*
3. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta* r_3 *avente le seguenti proprietà: 1)* r_3 *è ortogonale sia ad* r_1 *che a* r_2*; 2)* r_3 *interseca sia* r_1 *che* r_2*.*
4. *(1 punto) Determinare i punti* $P_1 = r_1 \cap r_3$ *e* $P_2 = r_2 \cap r_3$*.*
5. *(1 punto) Sia* $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1*,* P_2 *e* P_3*. Fare un disegno illustrativo.*
6. *(1 punto) Sia* $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Calcolare l'area del triangolo di vertici* P_1*,* P_3 *e* P_4*. Fare un disegno illustrativo.*

Sol.: 1) $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$r_2 : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

2) $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ r_1 ed r_2 sono sghembe

$$\operatorname{dist}(r_1, r_2) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) r_3 ha vettore direttore $v_1 \wedge v_2$, dove v_1 è il vettore direttore di r_1 e v_2 di r_2.

Consideriamo il piano contenente r_1 e parallelo a $v_1 \wedge v_2$:

$r_1 : \begin{cases} y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases} \leadsto$ fascio di piani per r_1:

$\alpha(y-z)+\beta(x+y+z-1)=0$. Esso è parallelo a

$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se e solo se

$\alpha(-2)+\beta(0)=0 \iff \alpha=0$.

Il piano cercato è $\pi_1 : x+y+z=1$.

Il piano contenente r_2 e parallelo a $v_1 \wedge v_2$ è

$\alpha(x+z)+\beta(x+y-1)=0$: $\alpha(1)+\beta(-1)=0$

$\iff \alpha-\beta=0$. Il piano cercato è

$\pi_2 : x+z+x+y-1=0$: $2x+y+z=1$

$r_3 = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

4. $P_1 = r_3 \cap r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $P_2 = r_3 \cap r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Area $\widehat{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \|(P_2-P_1)\wedge(P_3-P_1)\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

6. $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Area $\widehat{P_1P_3P_4} = \frac{1}{2} \|(P_3-P_1)\wedge(P_4-P_1)\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\|$

$= \sqrt{5}/4$