Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Ingegneria Chimica
Settimana 13
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 24 Dicembre 2019

Esercizio 1. *Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice 3×3*

$$A_k = \begin{pmatrix} -k & -k & 1 \\ k-1 & k-1 & -1 \\ k+1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

1. *(3 punti) Trovare tutti i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile.*
2. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, trovare una base diagonalizzante $\mathcal{B}$, una matrice B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}A_kB = D$.*
3. *(2 punti) Per i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile, calcolare A^{2n} per ogni $n \geq 1$.*

Esercizio 2. *Si consideri le seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Trovare una base di KerA ed una base di ImA.*
2. *(1 punto) Dimostrare che $\{v_1, v_2\}$ è linearmente indipendente.*
3. *(1 punto) Usando il teorema di decomposizione ortogonale, trovare due vettori $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ tali che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$.*
4. *(2 punti) Trovare la matrice C che rappresenta $S_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ nella base $\mathcal{B}$ in partenza e nella base canonica in arrivo.*
5. *(2 punti) Si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle$. Determinare una base di $KerA \cap U$ ed una base di $KerA + U$.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice* $A \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{R})$ *ed il seguente vettore* $b \in \mathbb{R}^3$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare che il sistema* $AX = b$ *non è risolubile.*
2. *Calcolare la proiezione ortogonale di* b *su* $Im(A)$*. Denotarla* b'*.*
3. *Risolvere il sistema* $AX = b'$*. Le soluzioni di questo sistema si chiamano le soluzioni approssimate del sistema* $AX = b$*.*

Esercizio 4. *Si considerino i due sottospazi vettoriali di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad W : \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1. *Dimostrare che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$*;*

2. *Stabilire se la proiezione su* U *lungo* W *che abbiamo denotato a lezione con* $P_U^W : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *è ortogonalmente diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una base ortonormale di* $\mathbb{R}^4$ *composta di suoi autovettori.*

Esercizio 5. *Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane*

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

1. *(1 punto) Determinare una base e la dimensione di U.*
2. *(3 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su U.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale su U di $X = 12(1, -1, 1, -1)^t$.*
4. *(2 punti) Calcolare la distanza di $X = 12(1, -1, 1, -1)^t$ da U.*

Esercizio 6. *Si consideri il polinomio*

$$p(x_1, x_2) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 2.$$

1. *Trovare le matrici A e b tali che $p(X) = X^t AX + 2B \cdot X + 2$.*

2. *Ridurre a forma canonica metrica la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.*

3. *Ridurre a forma canonica affine la conica $\mathcal{C}_p$, specificando i cambiamenti di coordinate.*

Esercizio 7. 1. *Siano A e B due matrici $n \times n$. Dimostrare che $Tr(AB) = Tr(BA)$. Dedurre che se A e C sono due matrici simili allora hanno la stessa traccia.*

2. *Dimostrare che se A e C sono due matrici simili allora $det(A) = det(C)$.*

3. *Sia A una matrice $n \times n$ diagonalizzabile e siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Dimostrare che $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ e $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.*