Programma del corso "Geometria 1"
Sapienza-Università di Roma
Ingegneria Civile, Ambiente e Territorio
a.a. 2019/2020
Docente: Prof. Giovanni Cerulli Irelli

Programma di massima

Sistemi di equazioni lineari :

Formalismo vettoriale
- Matrici
- Matrici associate a sistemi di equazioni lineari
- Sistemi di equazioni lineari come equazioni vettoriali
- Teorema di Rouchè-Capelli
- Forma parametrica delle soluzioni

Metodi di risoluzione
- Eliminazione di Gauss
- Decomposizione LU
- Decomposizione QR
- Formula di Cramer (quando applicabile)

Applicazioni
- Circuiti elettrici
- Reti di flusso (stradale o idraulico)
- Approssimazione di dati statistici

Spazi vettoriali :

- Esempi ($\mathbb{R}^n$, vettori geometrici del piano e dello spazio, polinomi di grado minore o uguale ad n, funzioni continue reali di variabile reale)
- Combinazioni lineari
- Dipendenza ed indipendenza lineare
- Basi
- Dimensione
- Sottospazi vettoriali
- Sottospazi affini
- Formula di Grassmann

Applicazioni lineari :

- Definizione
- Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare
- Teorema della dimensione
- Matrice associata ad un'applicazione lineare in due basi date
- Moltiplicazione righe per colonne di matrici
- Inversa di una matrice quadrata
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Algoritmo di inversione

Determinante :

- Definizione e proprietà
- Sviluppo di Laplace
- Teorema di Binet
- Tecniche di calcolo del determinante
- Tecniche per il calcolo dell'inversa:
  - Teorema di Cayley-Hamilton
  - Formula di Cramer

Spazi metrici :

- Forme bilineari
- Forme quadratiche
- Prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale
- Norma
- Angoli
- Distanza tra sottospazi affini

Approssimazioni lineari :

- Proiezione ortogonale
- Soluzioni approssimate di un sistema non risolubile di equazioni lineari
- Equazioni normali di un sistema di equazioni lineari
- Tecniche di calcolo delle soluzioni approssimate
- Polinomio approssimante di dati statistici

Autovalori ed autovettori :

- Interpretazione geometrica
- Matrici diagonalizzabili
- Teorema spettrale per matrici reali simmetriche

Coniche :

- Classificazione affine e metrica delle coniche

Tutti i risultati (a parte il teorema fondamentale dell'algebra) sono stati dimostrati a lezione.

Diario delle lezioni

Settimana 1: Lun 23/09: Presentazione del corso. Definizione di gruppo commutativo (o abeliano). Definizione di campo. Definizione di numeri complessi. I numeri complessi formano un campo.

Mar 24/09: Modulo e coniugato di un numero complesso e loro proprietà. Teorema fondamentale dell'algebra. Forma trigonometrica dei numeri complessi.

Mer 25/09: Insieme dei polinomi in una indeterminata, somma e prodotto di polinomi. Divisione tra polinomi. Teorema di Ruffini (un polinomio P(x) è diviso con resto zero dal polinomio lineare (x-a) per ogni sua radice a).

Giov 26/09: Definizione di matrici di taglia $m \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Matrice di adiacenza ad un grafo orientato. Definizione di somma di matrici. Le matrici $m \times n$ formano un gruppo rispetto alla somma. Prodotto di uno scalare per una matrice. Proprietà del prodotto per scalari. Comandi MATLAB per definire una matrice, la somma di matrici, la matrice nulla ed il prodotto per scalari.

Settimana 2: Lun 30/09: Definizione di spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Definizione di vettore. Vettori geometrici del piano: definizione di segmenti orientati congruenti, definizione di vettore geometrico applicato ad un punto O. Definizione di segmenti orientati del piano applicati ad O. Definizione di somma tra segmenti orientati applicati ad O. I segmenti orientati applicati a O con la somma sono un gruppo abeliano.

Mar 01/10: Ancora sui vettori geometrici: definizione di prodotto per scalari. Proprietà del proddotto per scalari. I segmenti orientati del piano applicati ad un punto O formano uno spazio vettoriale reale. Altri esempi di spazi vettoriali: matrici $m \times n$, matrici colonna, polinomi, polinomi di grado minore o uguale ad n, funzioni reali di variabile reale. Esercizi sulla somma ed il prodotto per scalari di vettori geometrici del piano.

Mer 02/10: Proprietà degli spazi vettoriali (legge di cancellazione per la somma, unicità dell'opposto, legge di annullamento). Combinazioni lineari.

Giov 03/10: Ancora sulle combinazioni lineari. Rette per O come sottospazi vettoriali dei vettori geometrici applicati ad O. Definizione di Col(A) per una matrice $m \times n$. Sottospazi vettoriali. L'intersezione di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale. Teorema: L'insieme delle combinazioni lineari di k vettori dati è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente tali vettori. Sottospazio generato. Generatori standard dello spazio vettoriale delle matrici colonna. Generatori standard dello spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di n.

Settimana 3: Lun 07/10: Ancora sui sottospazi generati. Generatori standard di $\mathbb{K}^n$ e dei polinomi di grado minori o uguali a n. Generatori dello spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano. Lemma di scambio.

Mar 08/10: Dipendenza ed indipendenza lineare. Un sottoinsieme (non vuoto) di un insieme linearmente indipendente è linearmente indipendente. Lemma di dipendenza lineare. Lemma di indipendenza lineare. Teorema fondamentale sull'indipendenza lineare.

Mer 09/10: Correzione degli esercizi settimanali. Commenti sul teorema fondamentale dell'indipendenza lineare. Definizione di base. Basi standard dello spazio delle matrici colonna e dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale di n. Basi dello spazio vettoriale dei vettori geometrici del piano. Dimensione di uno spazio vettoriale che ammette una base.

Giov 10/10: Spazi vettoriali finitamente generati. Uno spazio vettoriale finitamente generato ammette una base (algoritmo di generazione di basi). Vettori geometrici dello spazio. Coordinate di una vettore in una base. "Funzione coordinate" in una base. La funzione coordinate in una base è biiettiva.

Settimana 4: Lun 14/10: Teorema del completamento (di un insieme linearmente indipendente ad una base). Soluzioni-base di un'equazione lineare omogenea. Somma di sottoinsiemi di uno spazio vettoriale. La somma di due sottospazi vettoriali è un sottospazio vettoriale. Formula di Grassmann.

Mar 15/10: Tutoraggio (Prima ora.). Sottospazi affini di uno spazio vettoriale. Spazio di giacitura, dimensione e vettori direttori di un sottospazio affine. Definzione di punto, retta, piano ed iperpiano di uno spazio vettoriale.

Mer 16/10: Correzione degli esercizi settimanali. Esercizi sulla formula di Grassmann.

Giov 17/10: Definizione di funzione (o applicazione) lineare. Esempi (valutazione di un polinomio in un numero, coniugio) e non-esempi (l'n-esima potenza è lineare se e solo se n=1, funzione traslazione) di funzioni lineari. La funzione "coordinate in una base" è lineare. Trasposta di una matrice. La trasposta è una funzione lineare. Comando MATLAB per la trasposta. Matrici simmetriche ed anti-simmetriche. Ogni matrice quadrata è la somma di una matrice simmetrica ed una anti-simmetrica. Una funzione lineare manda il vettore nullo nel vettore nullo. Una funzione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base. Definizione di nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Il nucleo è un sottospazio vettoriale.

Settimana 5: Lun 21/10: Esercizi sul nucleo di una funzione lineare. Il nucleo di una funzione lineare è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale di partenza. Una funzione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è banale. Immagine di una funzione lineare. L'immagine di una funzione lineare è un sottospazio vettoriale. Formula della dimensione. Esercizi sull'immagine di una funzione lineare. Isomorfismo lineare e spazi vettoriali isomorfi. Ogni spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Composizione di funzioni. Inversa destra e sinistra di una funzione. Se una funzione ha inversa destra allora è suriettiva. Se una funzione ha inversa sinistra allora è iniettiva. Inversa di una funzione. Una funzione ammette inversa se e solo se è iniettiva e suriettiva.

Mar 22/10 [1 ora]: L'inversa di un isomorfismo lineare è lineare. Funzioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$. La funzione $S_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ("moltiplicazione sinistra per una matrice A $m \times n$"). La funzione moltiplicazione a sinistra per una matrice $m \times n$ è lineare. Una funzione da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ è lineare se e solo se è la moltiplicazione sinistra per una matrice $m \times n$ (a coefficienti in $\mathbb{K}$).

Mer 23/10: Correzione degli esercizi settimanali. Composizione di S_A con S_B. Prodotto righe per colonne di matrici compatibili.

Giov 24/10: Prodotto righe per colonne. Proprietà del prodotto righe per colonne. Matrice identità. Matrici scalari. Matrici diagonali. Prodotto di matrici a blocchi.

Settimana 6: Lun 28/10: Esempi di sistemi di equazioni lineari (=sistemi lineari). Sistemi lineari associati a circuiti elettrici. Matrice dei coefficienti, matrice delle incognite, matrice dei termini noti e matrice completa associate ad un sistema lineare.

Mar 29/10 [1 ora]: Teorema di Rouchè-Capelli. Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare. Esempi ed esercizi.

Mer 30/10: Correzione degli esercizi settimanali. Esercizi su sistemi lineari, anche dipendenti da un parametro.

Giov 31/10: Matrici a scala. Le colonne dominanti di una matrice a scala formano una base per lo spazio delle colonne. Sistemi a scala. Un sistema a scala è risolubile se e solo se la colonna dei termini noti nella matrice completa non è dominante. I sistemi a scala (risolubili) si risolvono con "sostituzione all'indietro". Sistemi a scala ridotta. I sistemi a scala ridotta (risolubili) sono immediatamente risolubili. Sistemi equivalenti. Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema lineare. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Matrici equivalenti per righe. Teorema fondamentale della riduzione a scala: ogni matrice è equivalente per righe ad un'unica matrice a scala ridotta. Comando MATLAB: rref. Se le matrici complete di due sistemi sono equivalenti per righe allora i sistemi sono equivalenti. Ogni sistema è equivalente ad un sistema a scala ridotta.

Settimana 7: Lun 04/11: Soluzioni di un sistemi a scala ridotta. Soluzioni base di un sistema omogeneo a scala ridotta. Dimostrazione del teorema fondamentale della riduzione a scala.

Mar 05/11 [1 ora]: Applicazioni dell' algoritmo di Gauss: per il calcolo di una base del nucleo di una matrice, per il calcolo del rango di una matrice, per il calcolo di una base dell'immagine di una matrice.

Mer 06/11: Correzione degli esercizi settimanali. Esercizi su sistemi con parametro. Nucleo ed immagine di matrici (eventualmente complesse).

Giov 07/11: Rango-riga di una matrice. Il Rango-riga è uguale al rango della matrice trasposta. Teorema: il rango-riga è uguale al rango. Matrici invertibili: condizioni equivalenti di invertibilità. Inversa del prodotto. Inversa della trasposta. Inversa di una matrice 2x2. Determinante di una matrice 2x2. Utilizzo dell'algoritmo di Gauss per il calcolo dell'inversa: algoritmo di inversione. Correzione degli esercizi settimanali usando MATLAB. Comando MATLAB per l'inversa: $^{-1}$. Comando MATLAB per il numero immaginario i.

Settimana 8: Lun 11/11: Matrici elementari: le operazioni elementari sulle righe di una matrice equivalgono a moltiplicare la matrice a sinistra per una matrice elementare. Teorema: Se A è equivalente per righe a B allora esiste T invertibile tale che B=TA; T è prodotto di matrici elementari e si trova con l'algoritmo di inversione generalizzato $(A|1) - - > (B|T)$. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{K}^m$.

Mar 12/11 [1 ora]: Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbb{K}^m$.

Mer 13/11: Correzione degli esercizi settimanali. Esercizi su forma parametrica e cartesiana di sottospazi affini (e loro intersezione) di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$.

Giov 14/11: Teorema/Definizione: il determinante è l'unica funzione sulle matrici nxn tale che

1) cambia segno se si scambiano due righe, 2) se una riga viene moltiplicata per uno scalare x allora il determinante viene moltiplicato per x, 3) non cambia se si somma ad una riga un multiplo di un'altra riga, 4) vale 1 sull'identità. Una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante non è zero. Il determinante di una matrice a scala è uguale al prodotto dei suoi pivot. Teorema di Binet. Il determinante della trasposta di A è uguale al determinante di A.

Il determinante è l'unica funzione sulle matrici nxn tale che

1) cambia segno se si scambiano due colonne, 2) se una colonna viene moltiplicata per uno scalare x allora il determinante viene moltiplicato per x, 3) non cambia se si somma ad una colonna un multiplo di un'altra colonna, 4) vale 1 sull'identità. Per calcolare il determinante: operare sulle righe o sulle colonne in maniera da ridurre la matrice a scala e poi fare il prodotto dei pivot. Sviluppo di Laplace del determinante lungo una riga e lungo una colonna (senza dimostrazione). Per calcolare il determinante: operare sulle righe o sulle colonne in maniera da creare tanti zeri su una riga o su una colonna e poi applicare Laplace su tale riga o colonna. Esempi ed esercizi.

Settimana 9: Lun 18/11: Matrice dei cofattori o matrice aggiunta di una matrice quadrata. Teorema: $AAgg(A)^t = det(A)\mathbf{1}_n$. Calcolo dell'inversa mediante il determinante (Formula di Cramer). Utilizzo del determinante per la risoluzione di sistemi quadrati non-singolari (Formula di Cramer). Esempi ed esercizi.

Mar 19/11: Esempi ed esercizi sul determinante e le formule di Cramer. Minori di una matrice. Utilizzo del determinante per il calcolo del rango di una matrice (Teorema degli orlati). Determinante di una matrice a blocchi trangolare. Esempi ed esercizi.

Mer 20/11: Correzione degli esercizi settimanali. Esercizi su equazioni cartesiane e parametriche. Esercizi sulle formule di Cramer.

Giov 21/11: Geometria affine del piano: condizioni di parallelismo tra due rette; condizioni di incidenza tra due rette; fascio di rette per un punto; retta per due punti distinti; fascio improprio di rette. Geometria euclidea del piano: prodotto scalare standard; proprietà del prodotto scalare standard; norma; versori; versori in termini di coseni e seni; versori direttori di una retta; distanza tra due vettori.

Settimana 10: Lun 25/11: Lezione annullata.

Mar 26/11: Ancora sulla geometria euclidea del piano: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; definizione di coseno dell'angolo tra due vettori; Vettori ortogonali; insiemi ortogonali; gli insiemi ortogonali sono linearmente indipendenti; basi ortonormali.

Mer 27/11: Coefficienti di Fourier; Sottospazi ortogonali; Disuguaglianza triangolare; Teorema di Pitagora. Correzione di alcuni esercizi settimanali.

Giov 28/11: Rappresentazione grafica di $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard; sistemi di riferimento cartesiani; Proiezione ortogonale: la proiezione ortogonale di w su v è il multiplo di v più vicino a w (dimostrazione analitica ed algebrica); teorema di decomposizione ortogonale di $\mathbb{R}^2$; Angolo tra due rette; pendenza e coseni direttori di una retta; Determinante come area orientata; utilizzo del determinante per il calcolo dell'area di un triangolo; distanza punto-retta.

Settimana 11: Lun 02/12: Equazioni parametriche e cartesiane di una circonferenza nel piano euclideo. Retta tangente ad una circonferenza in un punto. Condizioni di tangenza. Rette passanti per un punto esterno alla circonferenza e tangenti alla circonferenza. Geometria affine dello spazio: condizioni di posizione reciproca di due rette nello spazio a seconda della loro forma (parametrica o cartesiana).

Mar 03/12: (1ora) Posizione reciproca retta/piano e piano/piano. Piano passante per 3 punti. Stella di piani per un punto. Fasci di piani per una retta. Esercizio 22 pagina 268 del libro di esercizi.

Merc 04/12: Correzione degli esercizi settimanali. Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^3$: prodotto scalare standard (o prodotto puntino), norma, Disugugalianza triangolare, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, coseno dell' angolo tra due vettori, Rappresentazione grafica di $\mathbb{R}^3$ (dotato del prodotto scalare standard), riferimenti cartesiani destrorsi e mancini, regola della mano destra, proiezione ortogonale di un vettore su un altro non-nullo, distanza punto-retta.

Giov 05/12: Ancora sulla struttura metrica standard di $\mathbb{R}^3$: ortogonale di un sottospazio vettoriale; interpretazione dei coefficienti delle equazioni che definiscono una retta come generatori del piano ortogonale alla retta; interpretazione dei coefficienti dell'equazione che definisce un piano come generatore della retta ortogonale al piano; versori normali ad un piano; insiemi ortogonali; gli insiemi ortogonali sono linearmente indipendenti; basi ortogonali; coefficienti di Fourier; basi ortonormali; discussione informale sul concetto di orientazione dello spazio; basi equiverse e contraverse; il prodotto vettoriale (definizione); proprietà del prodotto vettoriale; la norma del prodotto vettoriale tra due vettori è uguale all'area del parallelogramma generato da tali vettori; Prodotto misto (definizione); il prodotto misto di u,v,w è uguale a det(u,v,w); Il determinante 3x3 come volume (orientato); versori direttori di una retta in forma cartesiana.

Settimana 12: Lun 09/12: Distanza punto-piano, distanza retta-retta, distanza punto-retta. Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt per $\mathbb{R}^3$.

Mar 10/12: (1 ora) Isometrie del piano.

Merc 11/12 (1 ora): Correzione degli esercizi settimanali (Lezione tenuta da Paolo Sentinelli).

Merc 11/12 (1 ora): Matrici associate ad un'applicazione lineare in due basi (una in partenza ed una in arrivo).

Giov 12/12: Matrice di cambiamento di base. Matrici simili. Proiettori. Proiezioni ortogonali su una retta del piano di pendenza m. Il determinante di un endomorfismo lineare.

Settimana 13: Lun 16/12: Polinomio caratteristico. Polinomio caratteristico per matrici 2x2 e 3x3 in termini della traccia. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. La molteplicità geometrica è minore o uguale della molteplicità algebrica.

Mar 17/12 (1 ora): Teorema di caratterizzazione delle matrici diagonalizzabili: una matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se lo spettro è in $\mathbb{K}$ e la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica. Se una matrice ha tutti gli autovalori distinti in $\mathbb{K}$ allora è diagonalizzabile in $\mathbb{K}$.

Merc 18/12 (1 ora): Correzione degli esercizi settimanali.

Merc 18/12 (1 ora): Struttura metrica standard di $\mathbb{R}^n$. Proiezione ortogonale. Matrice di proiezione ortogonale nella base standard di $\mathbb{R}^n$.

Giov 19/12: Algoritmo di Gram-Schmidt. Descrizione della proiezione ortogonale in termini dei coefficienti di Fourier. Teorema spettrale reale. Teorema di Cayley-Hamilton. Cenni alla classificazione affine delle coniche (argomento facoltativo).

Roma, 01.09.2020

Prof. Giovanni Cerulli Irelli