

Nome, Cognome e Matricola

---

Esame scritto di Geometria 1  
Ingegneria per l'ambiente ed il territorio  
Appello di Gennaio 2021  
Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,  
Marco Trevisiol

21 Gennaio 2021

**Esercizio 1.** In  $(\mathbb{R}^2, \cdot)$  consideriamo i tre punti:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcolare le coordinate del punto  $P_3$  ottenuto riflettendo ortogonalmente  $P_1$  attraverso la retta passante per  $P_2$  e  $Q$ .
2. (1 punto) Dimostrare che i punti  $P_1, P_2, P_3$  non sono allineati.
3. (2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane delle tre bisettrici del triangolo  $T$  di vertici  $P_1, P_2$  e  $P_3$ .
4. (1 punto) Mostrare che le tre bisettrici concorrono e calcolare l'incentro  $I$  di  $T$ , ovvero la loro comune intersezione.
5. (2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza  $\mathcal{C}$  inscritta in  $T$  ovvero la circonferenza interna tangente ai tre lati del triangolo.



**Esercizio 2.** Sia  $k \in \mathbb{R}$ . Si considerino le seguenti due rette di  $\mathbb{R}^3$ :

$$r_1(k) : \begin{cases} 5x + 3y + 2z = 1 + k \\ -3x - y + 2z = 1 - k \end{cases} \quad e \quad r_2 = \left( \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) + \left\langle \left( \begin{array}{c} 2 \\ -4 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

Per ogni valore di  $k$  si risponda alle seguenti domande.

1. (1 punto) Determinare la posizione reciproca di  $r_1(k)$  ed  $r_2$ .
2. (1 punto) Trovare una forma parametrica per  $r_1(k)$  ed una forma cartesiana per  $r_2$ .

Sia  $\pi$  il piú piccolo sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$  che contenga  $r_1(k)$  per ogni  $k$ .

3. (2 punti) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per  $\pi$ .
4. (1 punto) Determinare la posizione reciproca fra  $\pi$  e  $r_2$ .
5. (2 punti) Calcolare la distanza fra  $\pi$  e  $r_2$ . Calcolare la minima distanza fra  $r_2$  e  $r_1(k)$  al variare di  $k$ .



**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 7 & -5 \\ 10 & -4 & 12 & -9 \\ 14 & -4 & 15 & -12 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) *Calcolare il polinomio caratteristico di  $A$ .*
2. (1 punto) *Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di  $A$ .*
3. (2 punti) *Calcolare le molteplicità geometriche di ogni autovalore di  $A$ .*
4. (3 punti) *Stabilire se  $A$  è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile  $B$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $B^{-1}AB = D$ .*



**Esercizio 4.** Si consideri lo spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali. Denotiamo con  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$  la base standard di  $V$ . Si consideri l'insieme  $\mathcal{B} = \{1 + 3x, -x + x^2, 1 + 4x - 2x^2\}$ .

1. (1 punto) Dimostrare che  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ .
2. (1 punto) Sia  $T : V \rightarrow V$  l'unica applicazione lineare tale che

$$\begin{aligned} T(1 + 3x) &= 2 + 6x + 2x^2, & T(-x + x^2) &= -1 - 3x - x^2, \\ T(1 + 4x - 2x^2) &= 4 + 14x + 3x^2. \end{aligned}$$

Scrivere la matrice  $A$  che rappresenta  $T$  nella base  $\mathcal{B}$  in partenza e nella base  $\mathcal{C}$  in arrivo.

3. (2 punti) Scrivere la matrice  $C$  che rappresenta  $T$  nella base  $\mathcal{C}$  (sia in partenza che in arrivo).
4. (1 punto) Trovare una base per  $\text{Ker}(T)$ .
5. (1 punto) Trovare una base per  $\text{Im}(T)$ .
6. (1 punto) Calcolare  $\dim(\text{Ker}(T) + \text{Im}(T))$  e  $\dim(\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T))$ .



**Esercizio 5.** *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) *Stabilire se il sistema  $Ax = b$  sia risolubile.*
2. (2 punti) *Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su  $\text{Col}(A)$ .*
3. (1 punto) *Calcolare la proiezione ortogonale  $b'$  di  $b$  su  $\text{Col}(A)$ .*
4. (1 punto) *Risolvere il sistema  $Ax = b'$ .*
5. (2 punti) *Calcolare la distanza di  $b$  da  $\text{Col}(A)$ .*

