Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo il triangolo* T *di vertici* $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *e* $P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. *(1 punto) Calcolare l'area di* T.
2. *(1 punto) Determinare il valore del parametro* $k \in \mathbb{R}$ *tale che la circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0$ *contenga tutti e tre i punti* P_1, P_2 *e* P_3, *verificando che ognuno di essi vi appartiene.*
3. *(1 punto) Dato un qualsiasi triangolo di vertici* A, B *e* C *dare un'equazione cartesiana per l'altezza relativa al vertice* A *(ovvero la retta passante per* A *ed ortogonale al lato opposto ad* A*).*
4. *(1 punto) Trovare equazioni cartesiane delle tre altezze* h_1, h_2 *e* h_3 *di* T *relative, rispettivamente, ai vertici* P_1, P_2 *e* P_3 .
5. *(1 punto) Determinare l'ortocentro di* T, *ovvero l'intersezione delle tre altezze e denotarlo con* H.
6. *(1 punto) Calcolare le coordinate del punto* P_0 *ottenuto riflettendo ortogonalmente l'ortocentro* H *attraverso la retta passante per* P_2 *e* P_3.
7. *(1 punto) Dimostrare che* P_0, P_1, P_2, P_3 *giacciono sulla stessa circonferenza.*

Fare un disegno che illustri la situazione.

Risposte numeriche: Area(T) = ______, k = ______, $H = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, $P_0 = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

h_1 : __________________ h_2 : __________________ h_3 : __________________

Svolgimento:

Esercizio 2. *Si considerino le seguenti due rette di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x - y = -2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

1. *(2 punti) Determinare la posizione reciproca di* r_1 *ed* r_2 *senza cambiare la loro forma.*

2. *(1 punto) Trovare una forma cartesiana per* r_1

3. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per* r_2*.*

4. *(1 punto) Calcolare la distanza tra* r_1 *ed* r_2*.*

5. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane per la retta* r_3 *avente le seguenti proprietà: 1)* r_3 *è ortogonale sia ad* r_1 *che a* r_2*; 2)* r_3 *interseca sia* r_1 *che* r_2*.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 6 & 4 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di 3 a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}$ *la base standard di* V*. Consideriamo le funzioni* $L : V \to V$ *e* $F : V \to \mathrm{Mat}_{1\times 5}(\mathbb{R})$ *definite su un polinomio* $p(x) \in V$ *come segue*

$$L(p(x)) = p(x+1) + p(x), \quad F(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3), p(4)).$$

1. *(1 punto) Dimostrare che le funzioni* L *e* F *sono lineari.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice* A *associata a* L *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
3. *(1 punto) Dimostrare che* L *è invertibile e calcolare* A^{-1}*.*
4. *(1 punto) Dimostrare che* F *ha rango massimo.*
5. *(1 punto) Sia* $p(x)$ *un qualunque polinomio appartenente a* V *tale che* $F(p(x)) = ((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4)$*. Dimostrare* $p(x) \in \mathrm{Ker}(L)$*.*
6. *(1 punto) Dimostrare che* $((-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4) \notin \mathrm{Im}(F)$*.*

Esercizio 5. *Si consideri la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^3$:*

$$b(X,Y) = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) - 2(x_3 - x_1)(y_3 - y_1).$$

1. *(2 punti) Determinare la matrice A associata a b nella base standard.*
2. *(1 punto) Dare la definizione di nucleo di b e calcolarne una base.*
3. *(2 punti) Calcolare la segnatura di b.*
4. *(1 punto) Calcolare una base di Sylvester per b e la corrispondente matrice di Sylvester.*
5. *(1 punto) Scrivere la forma quadratica associata a b nella base di Sylvester. Dedurre che l'insieme di vettori isotropi per b è dato dall'unione di 2 piani di $\mathbb{R}^3$.*