Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 7

Docenti: Giovanni Cerulli Irelli,
Marco Trevisiol

Da consegnare Martedi 17 Novembre 2020

Esercizio 1. *Si consideri la seguente matrice reale:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. *Dimostrare che A è invertibile.*
2. *Scrivere A come prodotto di matrici elementari.*
3. *Calcolare il determinante di ognuna di tali matrici elementari e verificare che il loro prodotto è uguale al determinante di A.*

Esercizio 2. *1. Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

2. Si consideri la seguente matrice complessa:

$$B = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i & 1-i \\ 2i & -i & 2+2i \\ -2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda colonna;

(b) Calcolare il determinante di B sviluppando la seconda riga.

Esercizio 3. *Per ogni $n \geq 1$ si consideri la matrice $A(n)$ di taglia $n \times n$ la cui componente (i,j) è definita dalla formula*

$$A(n)_i^j = \begin{cases} 1 & se\ i < j \\ 2 & se\ i = j \\ 3 & se\ i > j \end{cases}$$

Calcolare $det(A(2020))$.

Esercizio 4. *Siano* $L_1 : V_1 \to V_2$ *e* $L_2 : V_2 \to V_3$ *due funzioni lineari.*

1. *Dimostrare che* $rg(L_2 \circ L_1) = rg(L_1)$ *se* L_2 *è iniettiva.*
2. *Dimostrare che* $rg(L_2 \circ L_1) = rg(L_2)$ *se* L_1 *è suriettiva.*
3. *Esibire un esempio in cui* $L_2 \circ L_1$ *è un isomorfismo ma nè* L_1 *nè* L_2 *sono isomorfismi.*

Esercizio 5. *Sia* $V = \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$, *cioè le funzioni reali definite sull'intervallo* $[0, 2\pi]$. *Sia*

$$W = \langle 1, \cos(x), \sin(x), \cos^2(x), \sin^2(x), \cos(x)\sin(x), \cos(2x), \sin(2x)\rangle.$$

Dati n *punti* $x_1, \dots, x_n$ *in* $[0, 2\pi]$, *definiamo* $F : W \to \mathbb{R}^n$ *e* $G : \mathbb{R}^8 \to W$ *in questo modo:*

$$F(f(x)) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} G(e_1) = 1 \\ G(e_2) = \cos(x) \\ G(e_3) = \sin(x) \\ \quad\vdots \\ G(e_8) = \sin(2x) \end{array} \quad .$$

Vogliamo trovare la dimensione di W *e esibire una base estratta dai generatori di* W.

1. *Trovare* 3 *relazioni di dipendenza lineare fra i generatori di* W *(sfruttando le regole della goniometria).*

2. *Mostrare che* F *è una funzione lineare.*

3. *Sfruttando il suggerimento del primo punto, scegliere* 5 *punti* $x_1, \dots, x_5$ *e scrivere la matrice* A *associata alla funzione* $F \circ G$.

4. *Identificare le* 5 *colonne dominanti di* A *e calcolare il determinante della matrice aventi come colonne le colonne dominanti di* A. *Qual è una base di* W *estratta dai generatori sopra indicati?*