Nome, Cognome e Matricola

Esame scritto di Geometria 1
Appello di Gennaio 2021
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

14 Gennaio 2021

Esercizio 1. *In* $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ *consideriamo i tre punti:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Calcolare le coordinate del punto* P_3 *ottenuto riflettendo ortogonalmente* P_1 *attraverso la retta passante per* P_2 *e* Q*.*
2. *(1 punto) Dimostrare che i punti* P_1*,* P_2*,* P_3 *non sono allineati.*
3. *(2 punti) Calcolare le equazioni parametriche e cartesiane delle tre bisettrici del triangolo* T *di vertici* P_1*,* P_2 *e* P_3*.*
4. *(1 punto) Mostrare che le tre bisettrici concorrono e calcolare l'incentro* I *di* T*, ovvero la loro comune intersezione.*
5. *(2 punti) Trovare equazioni parametriche e cartesiane della circonferenza* $\mathcal{C}$ *inscritta in* T *ovvero la circonferenza interna tangente ai tre lati del triangolo.*

Esercizio 2. *Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino le seguenti due rette di $\mathbb{R}^3$:*

$$r_1 : \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} \quad e \quad r_2(k) : \begin{pmatrix} k \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per ogni valore di k si risponda alle seguenti domande.

1. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca di r_1 ed $r_2(k)$.*
2. *(1 punto) Trovare una forma parametrica per r_1 ed una forma cartesiana per $r_2(k)$.*

Sia π il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contenga $r_2(k)$ per ogni k.

3. *(2 punti) Determinare equazioni parametriche e cartesiane per π.*
4. *(1 punto) Determinare la posizione reciproca fra π e r_1.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza fra π e r_1. Calcolare la minima distanza fra r_1 e $r_2(k)$ al variare di k.*

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
2. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
3. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
4. *(3 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Si consideri lo spazio vettoriale* $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ *dei polinomi di grado minore o uguale di* 2 *a coefficienti reali. Denotiamo con* $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ *la base standard di* V*. Si consideri l'insieme* $\mathcal{B} = \{-1 + x^2, 2 + x, 1 - 2x^2\}$.

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* V.
2. *(1 punto) Sia* $T : V \to V$ *l'unica applicazione lineare tale che*

   $$T(x^2 - 1) = 1 - 2x + x^2, \qquad T(2 + x) = -4 + 2x + 2x^2,$$
   $$T(2 - 4x^2) = -1 + 6x - 5x^2.$$

   Scrivere la matrice A *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{B}$ *in partenza e nella base* $\mathcal{C}$ *in arrivo.*
3. *(2 punti) Scrivere la matrice* C *che rappresenta* T *nella base* $\mathcal{C}$ *(sia in partenza che in arrivo).*
4. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Ker}(T)$.
5. *(1 punto) Trovare una base per* $\mathrm{Im}(T)$.
6. *(1 punto) Calcolare* $dim(\mathrm{Ker}(T) + \mathrm{Im}(T))$ *e* $dim(\mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T))$.

Esercizio 5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Stabilire se il sistema $Ax = b$ sia risolubile.*
2. *(2 punti) Calcolare la matrice di proiezione ortogonale su $Col(A)$.*
3. *(1 punto) Calcolare la proiezione ortogonale b' di b su $Col(A)$.*
4. *(1 punto) Risolvere il sistema $Ax = b'$.*
5. *(2 punti) Calcolare la distanza di b da $Col(A)$.*