Esercizio 1. *Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.*

1. *(1 punto) Trovare il centro C ed il raggio $r > 0$ di $\mathcal{C}$.*

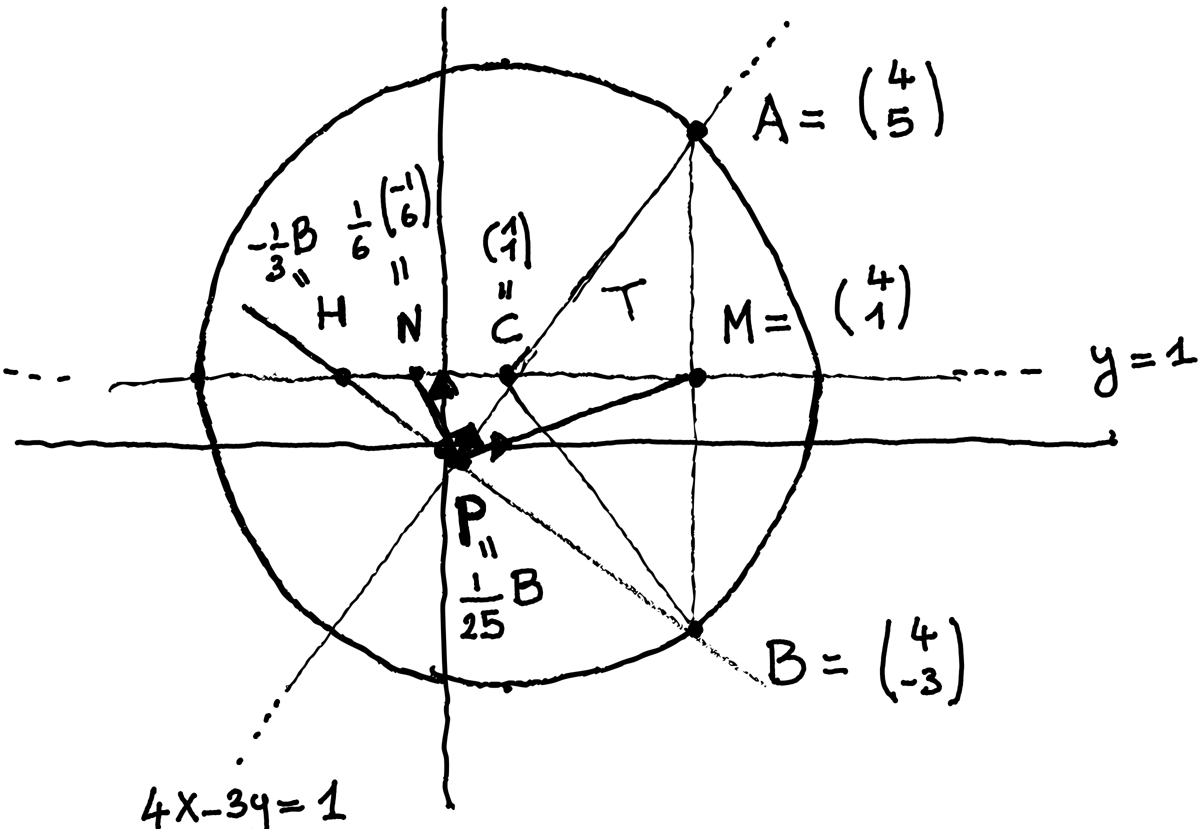
Per $\theta \in [0, 2\pi)$, denotiamo con $Q_\theta = C + r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

2. *(1 punto) Sia θ l'angolo* acuto *tale che $\sin\theta = \frac{4}{5}$. Trovare le coordinate dei punti $A = Q_\theta$ e $B = Q_{-\theta}$.*

Dati due punti distinti X e Y denotiamo con $\overline{XY}$ il segmento tra X e Y e con XY la retta passante per X e Y. Sia T il triangolo di vertici A, B e C.

3. *(1 punto) Sia M il punto medio di $\overline{AB}$. Calcolare le coordinate di M.*
4. *(1 punto) Sia P il piede dell'altezza di T relativa a B. Calcolare le coordinate di P.*
5. *(1 punto) Sia $H = PB \cap CM$. Calcolare le coordinate di H.*
6. *(1 punto) Sia N il punto medio di $\overline{HC}$. Calcolare le coordinate di N.*
7. *(1 punto) Dimostrare che i segmenti $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$ sono ortogonali.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*



1. $\mathcal{C}: \ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \Rightarrow C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ r=5.$

2. θ acuto t.c. $\sin\theta = 4/5$. Allora

$$\begin{cases} \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-16/25 = 9/25 \\ \cos\theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}.$$

3. $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

4. P è tale che $(P-B)\cdot(A-C)=0$ e $P \in AC$.
Quindi P è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3x+4y=0 \\ 4x-3y=1 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{25}B = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$$

5. $PB = \langle \overrightarrow{OB} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \right\rangle, \ CM: y=1 \Rightarrow H = -\frac{1}{3}B = \begin{pmatrix}-4/3\\1\end{pmatrix}$

6. $N = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}C = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$

7. $P-N = \frac{1}{25}B - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{150}\begin{pmatrix}49\\-168\end{pmatrix} = \frac{7}{150}\begin{pmatrix}7\\-24\end{pmatrix}$

$$P-M = \frac{1}{25}B - \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = -\frac{4}{25}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (P-N)\cdot(P-M) = 0.$$