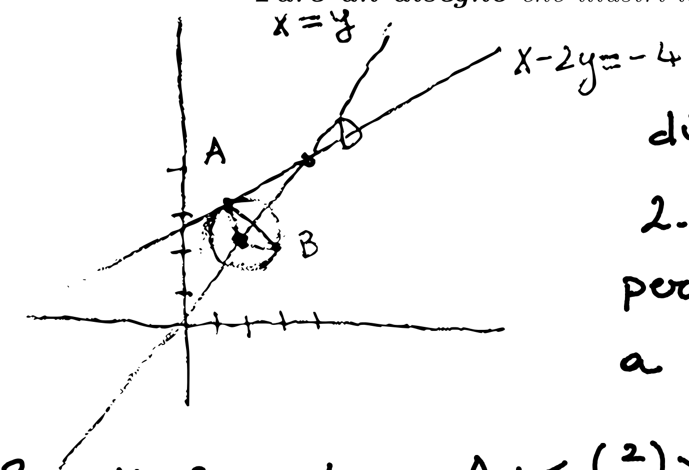
**Esercizio 1.** *In* $\mathbb{R}^2$ *consideriamo i due punti* $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Dati due punti* $X \neq Y$ *di* $\mathbb{R}^2$ *denotiamo con* $XY$ *la retta passante per* $X$ *e* $Y$ *e con* $\overline{XY}$ *il segmento di estremi* $X$ *e* $Y$.

1. *(2 punti) Determinare il punto* $B \neq A$ *appartenente alla retta* $x+y=5$ *e tale che* $dist(B,D) = dist(A,D)$.
2. *(2 punti) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche dell'asse del segmento* $\overline{AB}$.
3. *(1 punto) Determinare le equazioni cartesiane e parametrica di* $AD$.
4. *(2 punti) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della circonferenza che passa per i punti* $A$ *e* $B$ *e tangente alla retta* $AD$.

***Fare un disegno*** *che illustri la situazione.*




1. $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Infatti, $dist(B,D) = \| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{5} = \| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \| = dist(A,D)$.

2. $x = y$ ; $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$. Infatti, passa per $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è ortogonale a $B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. $x - 2y = -4$ ; $A + < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$.

4. Il centro deve giacere sull'asse di $\overline{AB}$, quindi è $C = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Il raggio deve essere ortogonale a $AD$, quindi $(A-C)\cdot(D-A) = 0$. $\begin{pmatrix} 2-x \\ 3-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, ovvero $2(2-x) + 3 - x = 0$ ovvero $x = \frac{7}{3}$. Deduciamo, $C = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $r = \|A - C\| = \| \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{3} \| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

La circonferenza ha eq. parametrica $C + r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ ed equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{3}x - \frac{14}{3}y + \frac{93}{9} = 0$$

**Esercizio 2.** *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Sia $r$ la retta passante per $P$ e parallela a $v$.*

1. *(2 punti) Sia $H$ la proiezione ortogonale di $A$ su $r$. Calcolare $H$.*
2. *(1 punto) Calcolare la distanza di $A$ dalla retta $r$.*
3. *(1 punto) Sia $A'$ il punto ottenuto riflettendo ortogonalmente il punto $A$ attraverso la retta $r$. Calcolare $A'$.*
4. *(1 punto) Calcolare l'area del triangolo di vertici $A$, $B$ e $C$.*
5. *(2 punti) Siano $s_1$ ed $s_2$ due rette con le seguenti proprietà: 1) $s_1$ passa per $A$ ed $s_2$ passa per $B$ 2) $s_1$ ed $s_2$ sono ortogonali ad $r$ 3) $s_1$ ed $s_2$ intersecano $r$. Stabilire la posizione reciproca di $s_1$ ed $s_2$.*

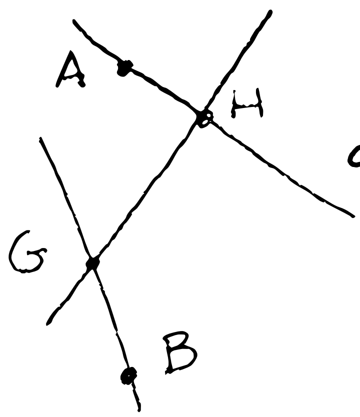
Sol.: 1. $H = P + \frac{(A-P)\cdot v}{v \cdot v} v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{dist}(A, r) = \| A - H \| = 3$

3. $A' = 2H - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. $\text{Area} = \frac{1}{2} \| (B-A) \wedge (C-A) \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \frac{15}{2}$

5. $G := pr_r(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $s_1 = H + \langle A-H \rangle$, $s_2 = G + \langle B-G \rangle$




$\det(A-H \mid B-G \mid H-G) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$

$\Rightarrow s_1$ ed $s_2$ sono sghembe

**Esercizio 3.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di $A$.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di $A$.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di $A$.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di $A$.*
5. *(2 punti) Stabilire se $A$ è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile $B$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $B^{-1}AB = D$.*

2. $P_A(x) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & x+1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ -2 & 2 & x-1 \end{pmatrix}$

$= (x-1)\det\begin{pmatrix} x+1 & 2 & 2 \\ x+1 & x+1 & 2 \\ 0 & 2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)\det\begin{pmatrix} x+1 & 2 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 2 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3(x+1).$

1. $\mathrm{Tr}\, A = 2$, $\det A = P_A(0) = -1$.

3. $ma_A(1) = 3$, $ma_A(-1) = 1$

4. $mg_A(-1) = 1$. $mg_A(1) = \dim \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \dim \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4-3 = 1 < 3 = ma_A(1)$

5. A non è diagonalizzabile perché $mg_A(1) < mg_A(1)$.

**Esercizio 4.** *Siano* $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset \mathbb{R}^4$ *due basi. Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *e* $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *le uniche funzioni lineari tali che*

$$f(v_1) = w_1 + w_2, \quad f(v_2) = w_2 + w_3;$$

$$g(w_1) = v_1 + v_2, \quad g(w_2) = v_2 - v_1, \quad g(w_3) = v_1 + v_2, \quad g(w_4) = v_1 - 2v_2.$$

1. *(2 punti) Scrivere le matrici associate ad* $f$ *e a* $g$ *nelle basi* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$.
2. *(1 punto) Stabilire se* $g \circ f$ *è invertibile.*
3. *(2 punti) Calcolare basi di nucleo e immagine di* $g \circ f$.
4. *(2 punti) Sapendo che* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *calcolare la matrice associata a* $g \circ f$ *nella base canonica di* $\mathbb{R}^2$.

Sol.: 1. La matrice associata a $f$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e la matrice associata a $g$ è $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $rg(BA) = 1 \Rightarrow g \circ f$ non è invertibile.

3. $\operatorname{Ker} BA = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Ker} g \circ f = \langle v_1 - v_2 \rangle$

$\operatorname{Im} BA = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \operatorname{Im} g \circ f = \langle v_2 \rangle$.

4.
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_e"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}_1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "F_e"] \\
\mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "C"] \arrow[r, "BA"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "C"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

dove $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice cercata è

$$C\,BA\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.** *Si consideri la seguente matrice* $4 \times 4$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*e la corrispondente forma bilineare* $b_G$ *su* $\mathbb{R}^4$ *definita come* $b_G(X,Y) := X^tGY$ *per ogni* $X, Y \in \mathbb{R}^4$.

1. *(1 punto) Calcolare il quadrato del vettore* $p = (-\frac{1}{15}, \frac{1}{2}, \frac{4}{15}, 1)^t$ *in* $(\mathbb{R}^4, b_G)$.
2. *(2 punti) Dimostrare che* $b_G$ *è non-degenere.*
3. *(2 punti) Trovare una base ortogonale di* $(\mathbb{R}^4, b_G)$.
4. *(2 punti) Calcolare la segnatura di* $b_G$.

Sol.: 1. $p^2 = p^t G p = (-\frac{1}{15}, \frac{1}{2}, \frac{4}{15}, 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{15} \end{pmatrix} = \frac{11}{15}$

2. $\det G = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -15 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -15 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \det \begin{pmatrix} 0 & -15 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} -15 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -15 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 44.$

3. Applico GS a partire dalla base standard.

$F_1 = e_1$; $F_1^2 = e_1^2 = G_1^1 = 4 > 0$

$F_2 = e_2$; $F_2^2 = e_2^2 = G_2^2 = 4 > 0$

$F_3 = e_3 - \frac{b_G(e_3, F_1)}{F_1^2} F_1 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F_3^2 = \frac{15}{4} > 0$

$F_4 = e_4 - \frac{b_G(e_4, F_3)}{F_3^2} F_3 - \frac{b_G(e_4, F_2)}{F_2^2} F_2 - \frac{b_G(e_4, F_1)}{F_1^2} F_1 = p$

$p^2 = \frac{11}{15} > 0$ per il p.to 1.

4. Dal punto 3 deduciamo che $sg(b_G) = (4, 0)$.