Esercizio 1. *In $\mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard si considerino i seguenti due punti P_1 e P_2 e la seguente retta r:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r : 3x + 2y = 6.$$

1. *(3 punti) Trovare, se esiste, un punto Q sulla retta r tale che il triangolo P_1P_2Q abbia area uguale ad uno.*
2. *(1 punto) Trovare il punto R di intersezione tra la retta r e la retta passante per P_1 e P_2.*
3. *(3 punti) Trovare tutti i punti S tali che P_1P_2S sia un triangolo equilatero.*

Fare un disegno *che illustri la situazione.*

Esercizio 2. *Consideriamo* $\mathbb{R}^3$ *dotato del prodotto scalare standard.*

1. *(3 punti) Siano* r, π *i seguenti sottospazi affini:*

$$r : \begin{cases} 2x - 3z = -2 \\ 2x + y + 3z = -2 \end{cases} \qquad \pi : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Stabilire la posizione reciproca di r *e* π *senza cambiare la loro forma.*

2. *(2 punti) Dimostrare che le seguenti rette sono sghembe:*

$$r = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle; \ s = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Trovare, dunque, il piano π *contenente* r *e parallelo a* s.

3. *(2 punti) Calcolare l'area del triangolo di vertici*

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ e \ P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Si consideri la seguente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -7+6i & -16+16i & -3+3i \\ 0 & -i & 0 \\ 14-14i & 32-32i & 6-7i \end{pmatrix}$$

1. *(1 punto) Calcolare la traccia ed il determinante di A.*
2. *(1 punto) Calcolare il polinomio caratteristico di A.*
3. *(1 punto) Calcolare la molteplicità algebrica di ogni autovalore di A.*
4. *(2 punti) Calcolare le molteplicità geometrica di ogni autovalore di A.*
5. *(2 punti) Stabilire se A è diagonalizzabile e nel caso lo sia trovare una matrice invertibile B ed una matrice diagonale D tali che $B^{-1}AB = D$.*

Esercizio 4. *Consideriamo i seguenti vettori di* $\mathbb{R}^3$*:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. *(1 punto) Dimostrare che* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$.
2. *(1 punto) Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'unica funzione lineare tale che*

   $$f(v_1) = v_1 - v_2, \quad f(v_2) = v_2 - v_3, \quad f(v_3) = v_3 - v_2.$$

   Trovare la matrice associata ad f *nella base* $\mathcal{B}$*. Chiamarla* A.
3. *(3 punti) Trovare la matrice associata ad* f *nella base standard di* $\mathbb{R}^3$*. Chiamarla* C.
4. *(1 punto) Trovare una base per il nucleo di* f.
5. *(1 punto) Trovare una base per l'immagine di* f.

Esercizio 5. *Consideriamo il seguente polinomio*

$$p(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 - 4$$

e denotiamo con $\mathcal{C}$ la conica di equazione $p(X) = 0$.

1. *(4 punti) Determinare la forma metrica canonica di $\mathcal{C}$, indicando il cambio di base effettuato.*

2. *(3 punti) Determinare la forma affine canonica di $\mathcal{C}$, indicando il cambio di base effettuato.*