Richiami: Abbiamo dimostrato

Teorema spettrale (reale)

Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se $A = A^t$.

Quindi se A è simmetrica, $\exists$ B ortogonale (i.e. $B^{-1} = B^t$) e una matrice diagonale D t.c.

$$B^t A B = D$$

B ha per colonne una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$.

$$\mathbb{R}^n = V_{\lambda_1}(A) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}(A)$$

$Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$.

Applicazione alle forme bilineari simmetriche

Sia $b = b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$b_A(X,Y) := X^t A Y = X \cdot AY \quad , \quad A = A^t$$

Sia $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ composta di autovettori per A (esiste per il teorema spettrale). Allora

$$b_A(E_i, E_j) = E_i \cdot A E_j = E_i \cdot \lambda_j E_j = \lambda_j \, E_i \cdot E_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_j & \text{se } i = j \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di $(\mathbb{R}^n, b_A)$.

$$E_i^2 = \lambda_i .$$

$\Rightarrow$ $(p,q) = sg(A) = sg(b_A)$, allora

$p =$ numero di autovalori positivi di A

$q =$ numero di autovalori negativi di A.

<u>OSS</u>: Gli autovalori di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ sono le radici (possibilmente complesse) di

$$P_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$$

Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono queste radici (con molteplicità) allora

$$P_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

In particolare,

$$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

<u>Es</u>: $A = R_{60°} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = R$

$$P_R(x) = x^2 - x + 1 \;; \quad Sp(R) = \left\{ \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 = Tr(A) \,, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 .$$

Forme quadratiche

Data una forma bilineare simmetrica $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^n$, la forma quadratica associata ad b_A o ad A è la funzione

$$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definita come

$$q_A(X) = b_A(X, X) = X^t A X$$

è un polinomio omogeneo di grado 2 in n variabili.

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & \underline{1} \\ \underline{1} & 3 \end{pmatrix}$.

$$q_A(X) = 2x_1^2 + \underline{2}x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$q(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

allora $q = q_A$ dove $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(a x_1 + \frac{b}{2} x_2, \frac{b}{2} x_1 + c x_2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= a x_1^2 + \frac{b}{\underline{2}} x_2 x_1 + \frac{b}{\underline{2}} x_1 x_2 + c x_2^2$$

$$= a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2.$$

$x_1 x_2 = x_2 x_1$

<u>Esercizio</u>: La forma bilineare b si ottiene da q con la formula

$$b(X, Y) = \frac{q(X+Y) - q(X) - q(Y)}{2}$$

~~Forme quadratiche in 2 variabili~~

Def: La segnatura di una forma quadratica è la segnatura della sua forma bilineare. $\boxed{sg(q) = sg(b)}$

Due quadriche $q_1(X)$ e $q_2(X)$ in $\mathbb{R}^n$ sono congruenti se $\exists$ B invertibile t.c.

$$q_1(X) = q_2(BX)$$

Se $q_1(X) = X^t A X$ e $q_2(X) = X^t C X$ allora

$$\underset{\text{congruenti}}{q_1 \sim q_2} \iff B^t C B = A \iff A \text{ e } C \text{ sono congruenti.}$$

Per il Teorema di Sylvester,

$$q_1 \sim q_2 \iff sg(q_1) = sg(q_2)$$

Forme quadratiche in 2 variabili

Sia $q = q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica.

$Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

$sg(A) = (2,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (0,2)$

$q \sim q^\circ \qquad q^\circ(X) = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 \quad [\sim \pm X_1^2 \pm X_2^2]$

$Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \ ,\quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2$

segnatura	q°	$Tr(A)$	$\det(A)$
$(2,0)$	$X_1^2 + X_2^2$	>0	>0
$(1,1)$	$X_1^2 - X_2^2$		<0
$(1,0)$	X_1^2	>0	0
$(0,1)$	$-X_2^2$	<0	0
$(0,2)$	$-X_1^2 - X_2^2$	<0	>0

Se q è una forma quadratica di segnatura (p,q), allora q è congruente alla forma canonica di Sylvester

$$q^0(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_q^2 .$$

Calcolo delle potenze di una matrice diagonalizzabile

Sia $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Allora $\exists\, B$ inv. e D diag. t.c.

$$B^{-1} A B = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \quad A = B D B^{-1}$$

$$A^2 = (B D B^{-1})(B D B^{-1}) = B D^2 B^{-1}$$

In generale,

$$\boxed{A^m = B\, D^m B^{-1}}$$

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & & \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

perché è simmetrica.

$Sp(A) = \{0, 2, 3\}$

esercizio

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base di autovettori.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}AB = D$

$A^n = B \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix} B^{-1}$

Teorema di Cayley - Hamilton

Sia $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, sia $p_A(x) = \det(x \mathbb{1}_n - A)$ il suo polinomio caratteristico. Allora

$$p_A(A) \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \sim \mathbb{1}_n}}{=} O_{n\times n}.$$

ovvero se

$$p_A(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

allora

$$\boxed{A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 \mathbb{1}_n = O_{n\times n}.} \qquad (*)$$

Es: $R = R_{60°} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $p_R(x) = x^2 - x + 1$

$$R^2 - R + \mathbb{1}_2 = O_{2\times 2}.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{R_{120°}} - \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo usare la relazione (*) per calcolare le potenze di A e l'eventuale inversa di A:

•) $R^2 - R + \mathbb{1}_2 = 0 \Rightarrow R^2 = R - \mathbb{1}_2$

$R^3 = R R^2 = R(R-1) = R^2 - R = R - 1 - R = -1$

•) $R^2 - R + \mathbb{1}_2 = 0 \Rightarrow R^2 - R = -\mathbb{1}_2$

$\Rightarrow \quad R - R^2 = \mathbb{1}_2$

$\Rightarrow \quad R(\mathbb{1}_2 - R) = \mathbb{1}_2$

$\Rightarrow \quad R^{-1} = \mathbb{1}_2 - R$

•) Se $\det A = a_0 \neq 0$ allora $a_0 \mathbb{1}_n = -A^n - a_{n-1} A^{n-1} - \dots - a_1 A$

$$a_0 \mathbb{1}_n = A \underbrace{\left(-A^{n-1} - a_{n-1} A^{n-2} - \dots - a_1 \mathbb{1}_n\right)}_{B} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a_0} B = A^{-1}}$$

Coniche

Coniche non-degeneri (reali):

Ellisse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = z^2 \Big|_{z=1}$

Iperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightsquigarrow \lambda_1 x^2 - \lambda_2 y^2 = z^2 \Big|_{z=1}$

Parabola : $x^2 - 4py = 0 \qquad \lambda_1 x^2 - yz \Big|_{z=1} = 0$

Def: Una conica è il luogo degli zeri di un polinomio di grado 2 in due variabili:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a x^2 + b xy + c y^2 + d x + e y + f = 0 \right\}$$

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

$$p(x) = a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f \quad \overset{\text{omogeneizziamo}}{\rightsquigarrow}$$

$$\hat{p}(x, y, z) = a x^2 + b x y + c y^2 + d x z + e y z + f z^2 =$$

$$= (x, y, z) \underbrace{\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}}_{= \hat{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

forma quadratica in tre variabili

$$p(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 b_1 x_1 + 2 b_2 x_2 + f$$

$$= (x_1, x_2, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & f \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array}\right)$$

$$p(x) = x^t A x + 2 b \cdot x + f$$

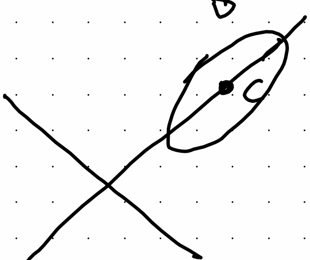
A e $\hat{A}$ sono simmetriche.

Due coniche $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_q$ $\left(\mathcal{C}_p = \{p(x)=0\},\ \mathcal{C}_q = \{q(x)=0\}\right)$ sono <u>equivalenti affinemente</u> se $\exists$ B invertibile, $C \in \mathbb{R}^2$ e $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ t.c.

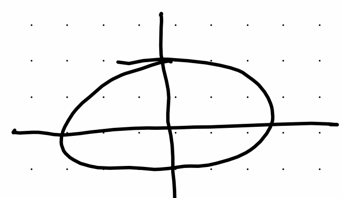
$$p(x) = \sigma\, q(Bx + c)$$

se B è ortogonale allora diciamo che $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_q$ sono metricamente equivalenti.

"Ruotiamo" gli assi



Trasliamo



Teorema: A meno di cambi metrici, la forma quadratica $q_{\hat{A}}$ si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & c \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2, \; c \in \mathbb{R}, \; \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

parabola:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, b_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teorema (Classificazione affine delle coniche)
Una conica $\mathcal{C}_P$ è affinemente equivalente ad una ed una sola delle seguenti **nove**:

1) $x^2+y^2-1=0$ [Ellisse reale]
2) $x^2-y^2-1=0$ [Iperbole]
3) $x^2-y=0$ [Parabola]
4) $x^2+y^2+1=0$ [Ellisse immaginaria]

non-degeneri

5) $x^2-y^2=0$
6) $x^2+y^2=0$
7) $x^2-1=0$
8) $x^2+1=0$
9) $x^2=0$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^t & f \end{array}\right) \quad , \quad A = A^t$$

In $\mathbb{R}^3$, fissiamo il piano $z=1$

$\hat{B}^t \hat{A} \hat{B}$ in cui $\hat{B}$ preserva $z=1$:

$$\hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & c \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BX+C \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}^t \hat{A} \hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} B^t A B & Bb+f \\ \hline (Bb+f)^t & * \end{array}\right)$$

$sg_2 = sg(A) \quad \longleftrightarrow \quad Tr(A)$, $\det A$

$sg_3 = sg(\hat{A})$

Es: Trovare la forma canonica affine e metrica della conica $\mathcal{C}_p$ dove

$$p(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 + 5$$

Sol.:

$$p(x) = x^t A x + 2b \cdot x + f$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f = 5$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ \hline -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(A) = 8, \quad \det A = -11 < 0 \Rightarrow \text{Iperbole.}$$

$$\det \hat{A} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -100 \neq 0$$

Trovare i cambiamenti metrici:

1) Diagonalizzare $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$:

$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ è una rotazione ($\det B = 1$)

$X := BY$ $\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 \end{cases}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad p(X) = p(BY) = (BY)^t A BY + 2b \cdot BY + f$$

$$= Y^t D Y + 2 B^t b \cdot Y + f = q(Y) =$$

$$= 9y_1^2 - y_2^2 + 2\left(\frac{7}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{6}{\sqrt{5}} y_2\right) + 5$$

2) Per "eliminare" il termine lineare:

$Y = Z + C$

$$p(X) = q(Y) = (z+c)^t D (z+c) + 2 B^t b \cdot (z+c) + f$$

$$= z^t D z + \underline{c^t D z} + \underline{z^t D c} + c^t D c +$$

$$+ \underline{2 B^t b \cdot} z + 2 B^t b \cdot c + f$$

$$= z^t D z + (2 Dc \cdot z + 2 B^t b \cdot z) + q(c)$$

Scegliamo c ~~come~~ ~~so~~ t.c. $Dc + B^t b = 0$

$$\boxed{Dc = -B^t b.}$$

$$c = \begin{pmatrix} -7/9\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$p(X) = q(Y) = 9 z_1^2 - z_2^2 + \frac{100}{9} = r(z)$$

$$\mathcal{C}_p : \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 = \frac{100}{9} \qquad b^2 = \frac{100}{81}$$

forma metrica.

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{|a|}} \qquad x_2 = \frac{y}{\sqrt{|b|}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 1$$

forma affine