

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 2
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedì 13 Ottobre 2020

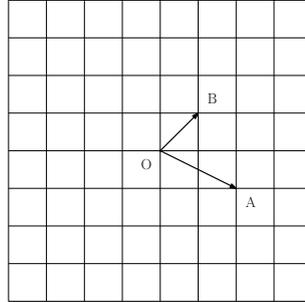
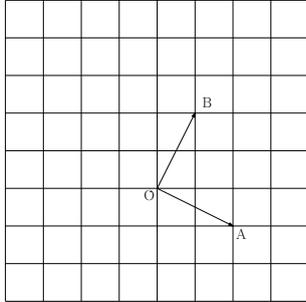
Esercizio 1. Di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 , stabilire, motivando la risposta, se sono o meno un sottospazio vettoriale: ($X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$)

1. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
2. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
3. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2 - x_3 = 0\}$
4. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_1 \geq 0\}$
5. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 + x_3 = 0\}$
6. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$
7. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$
8. $\{X \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_2 + x_3 = 1\}$

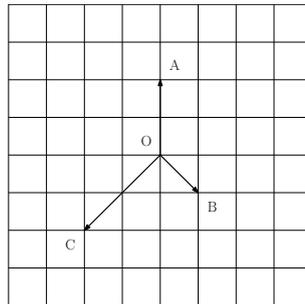
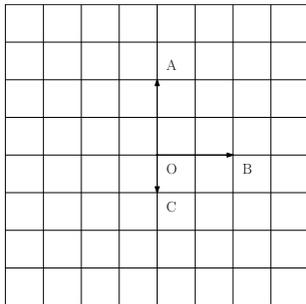
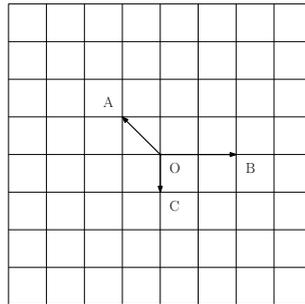
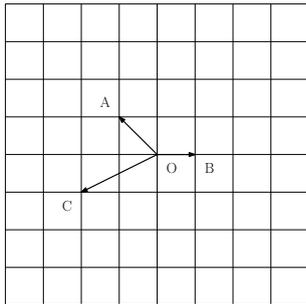
Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , e siano $u, v \in V$. Calcolare $U \cap W$, motivando la risposta, nei seguenti casi:

1. $U = \langle u, u + v \rangle$ e $W = \langle 2u + v \rangle$;
2. $U = \langle u + v, u - v \rangle$ e $W = \langle u, v \rangle$;
3. $U = \langle u + v \rangle$ e $W = \langle u + 2v \rangle$.

Esercizio 3. 1. Per le seguenti coppie di vettori geometrici \vec{OA} e \vec{OB} disegnare i vettori geometrici $\vec{OA} + \vec{OB}$, $(-2)\vec{OA} + \vec{OB}$, $2\vec{OB}$.



2. In ognuno dei seguenti casi, disegnare il vettore geometrico $(\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OC}$ e verificare che sia uguale a $\vec{OA} + (\vec{OB} + \vec{OC})$. Disegnare inoltre il vettore $2(\vec{OA} + \vec{OB})$ e verificare che sia uguale a $2\vec{OA} + 2\vec{OB}$.



Esercizio 4. *Determinare se l'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è linearmente indipendente oppure linearmente dipendente in ognuno dei seguenti casi:*

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;$

2. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$

3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;$

4. $v_1 = 1 + x, v_2 = 1 + x - x^2, v_3 = 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3};$

5. $v_1 = \sin(x), v_2 = \sin(2x), v_3 = \sin(3x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}.$

Esercizio 5. 1. *Dimostrare che gli insiemi*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

sono basi di \mathbb{R}^2 .

2. *Esprimere i seguenti vettori come combinazione lineare di ognuna delle basi \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 :*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$