

Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 3
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedì 20 Ottobre 2020

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x di grado al più tre e a coefficienti reali. Si considerino i seguenti insiemi

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - x, 1 + x, x + x^2, 2x - x^2 + 2x^3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\}.$$

e sia $p(x) = 2 - 3x + 2x^2 - x^3$.

1. Dimostrare che \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 sono basi di V .
2. Calcolare il vettore delle coordinate $F_{\mathcal{B}_1}(p)$ di p nella base \mathcal{B}_1 .
3. Calcolare il vettore delle coordinate $F_{\mathcal{B}_2}(p)$ di p nella base \mathcal{B}_2 .

Esercizio 2. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^4 :*

$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, x_3 + x_4 = 0 \right\}, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

1. *Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 .*
2. *Trovare una base di U .*
3. *Trovare una base di $U \cap W$.*
4. *Trovare una base di $U + W$ seguendo la dimostrazione della formula di Grassmann.*

Esercizio 3. *Siano*

$$U_1 = \{X \in \mathbb{C}^3 : x_1 + ix_2 = 0 \text{ e } x_2 + ix_3 = 0\} \quad U_2 = \{X \in \mathbb{C}^3 : x_1 = -x_3\}$$

sottoinsiemi di \mathbb{C}^3 (dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$).

1. *Mostrare che U_1, U_2 sono sottospazi di $U_3 = \mathbb{C}^3$ e che $U_1 \subseteq U_2$.*
2. *Scegliere una base \mathcal{B}_1 di U_1 , estenderla a una base \mathcal{B}_2 di U_2 , quindi estenderla a una base \mathcal{B}_3 di $U_3 = \mathbb{C}^3$.*
3. *Scrivere esplicitamente le funzioni delle coordinate $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_1}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}_3}$ (in altre parole, scrivere, dato un vettore generico $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ in U_i , tutte le componenti del vettore $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_i}(X)$).*

Esercizio 4. Per ogni scelta del parametro reale t , fissiamo i seguenti vettori in \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1-t \\ t-1 \\ 3t-3 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ 2-2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $U_t = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W_t = \langle v_3, v_4 \rangle$.

1. Esiste un $t \in \mathbb{R}$ tale che $U_t + W_t = \mathbb{R}^4$?
2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ si ha $\dim(U_t \cap W_t) = 1$?
3. Determinare una base di $U_0 \cap W_0$, quindi estenderla a una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 5. *Dati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :*

$$U = \text{Span} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad V = \text{Span} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

stabilire se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = V \oplus W = \mathbb{R}^4$. In caso affermativo di determini W e si dica se è unico.