Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 5
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 03 Novembre 2020

Esercizio 1. *In ognuno dei seguenti casi, calcolare DA e AD'. Trovare la regola generale per determinare cosa succede ad una matrice A quando la si moltiplica a* sinistra *con una matrice diagonale D e quando la si moltiplica a* destra *con una matrice diagonale D'.*

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

2. $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D' = 6\mathbf{1}_3.$

3. $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D' = D.$

Esercizio 2. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A e B stabilire se sono simili (ovvero se S_A ed S_B sono simili) e nel caso lo siano trovare degli isomorfismi F_1 ed F_2 tali che $S_B \circ F_1 = F_2 \circ S_A$:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbf{1}_2.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 2+2i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & -1+i & 1 \\ -i & 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 3. *In ciascuno dei seguenti casi dimostrare che l'affermazione è vera oppure scrivere un controesempio che permetta di stabilire che l'affermazione è falsa. In tutto l'esercizio A e B denotano due matrici.*

1. *Se AB è definita anche BA è definita.*
2. *Se $AB = BA$ allora A e B sono entrambe quadrate e hanno la stessa taglia.*
3. *Se A e B sono quadrate della stessa taglia allora $AB = BA$.*
4. *Se A ha una riga nulla allora anche AB ha una riga nulla.*
5. *Se A ha una colonna nulla allora anche AB ha una colonna nulla.*
6. *Se $AB = 0$ allora o $A = 0$ o $B = 0$.*
7. *L'uguaglianza $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ è sempre valida se A e B sono quadrate della stessa taglia.*
8. *Se $AB = A$ allora B è la matrice identità.*
9. *Se $AB = \mathbf{1}$ allora A è invertibile e B è l'inversa di A.*

Esercizio 4.

1. *Trovare* $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tale che* $A^2 = -\mathbf{1}_2$.
2. *Si considerino le matrici* $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *ed* $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Data una matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *calcolare* AE_{11}, $E_{11}A$, AE_{12}, $E_{12}A$. *Verificare il risultato con MATLAB.*
3. *Sia* A *una matrice di taglia* 2×2 *tale che* $AB = BA$ *per ogni* B. *Dimostrare che allora* A *è una* matrice scalare *ovvero esiste uno scalare* x *tale che* $A = x\mathbf{1}_2$.
4. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Dimostrare la seguente uguaglianza di matrici:*

$$A^2 - 4A + 5\mathbf{1}_2 = \mathbf{0}_{2\times 2}.$$

Esercizio 5. 1. *Sia T una matrice quadrata* triangolare superiore a blocchi, *ovvero avente la seguente decomposizione in blocchi* $T = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$.
Determinare T^2 utilizzando la moltiplicazione a blocchi.
Usare questo risultato per calcolare le potenze T^2, T^3, T^4 della matrice $T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$. *Qual'è l'aspetto di T^n per $n \geq 1$?*

2. *Calcolare il prodotto AB a blocchi sapendo che:*

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 5 & -1 & -2 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

3. *Calcolare i seguenti prodotti a blocchi assumento che le ripartizioni siano compatibili rispetto al prodotto.*

- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \\ -Y & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ Y & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -X \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ Y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} X & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -X \end{pmatrix}$