Nome, Cognome e Matricola

Esercizi Settimanali di Geometria 1
Settimana 10
Docente: Giovanni Cerulli Irelli

Da consegnare Martedi 8 Dicembre 2020

Esercizio 1. *Sia $b(x,y)$ la seguente forma bilineare simmetrica di $\mathbb{R}^3$:*

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - 2(x_1 + x_3)(y_1 + y_3).$$

1. *Scrivere la matrice che rappresenta b nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.*
2. *Scrivere la matrice che rappresenta b nella base*

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

3. *Calcolare la segnatura di b.*
4. *Calcolare una base di Sylvester per b.*
5. *Dimostrare che i vettori isotropi di $(\mathbb{R}^3, b)$ giacciono in due piani di $\mathbb{R}^3$, quindi calcolarne le due equzioni cartesiane.*

Esercizio 2. *Stabilire quali delle seguenti matrici sono congruenti calcolando le segnature.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. *Trovare equazioni parametriche e cartesiane delle rette (due in ognuno dei casi) aventi coseni direttori rispettivamente:*

1. $(1, 0)$;
2. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$;
3. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;
5. $(0, 1)$.

Fare un disegno in ognuno dei casi.

Esercizio 4. *Per ciascuna delle seguenti rette calcolare i versori direttori e i versori normali (ovvero i versori direttori delle rette ortogonali) e fare un disegno illustrativo.*

1. $r_1 : 3x - 5y + 2 = 0$;
2. $r_2 : -x + 7y - 5 = 0$;
3. $r_3 : 2x + y + 8 = 0$;
4. $r_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \rangle$

Esercizio 5. *Dopo aver dimostrato che l'insieme $\mathcal{B}$ di vettori di seguito definiti forma una base di $\mathbb{R}^4$, calcolare una base ortonormale $\mathcal{B}'$ (rispetto al prodotto scalare standard) applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$